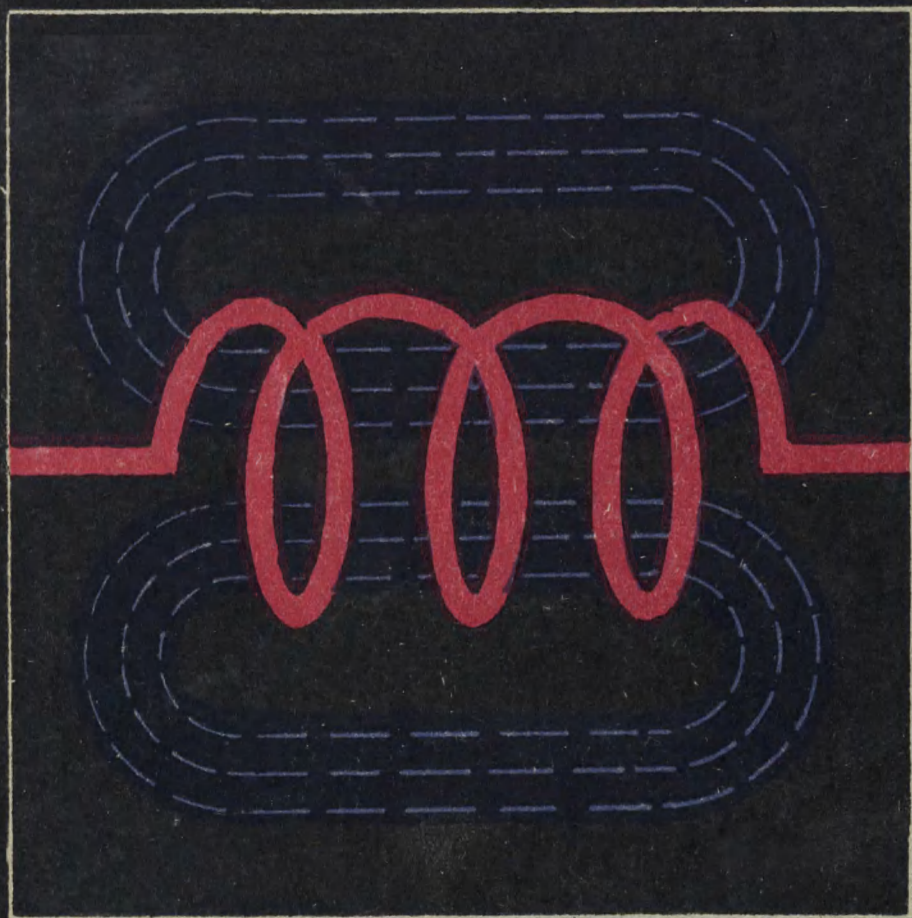


Н.М. КИРСАНОВ



**ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ЛИНЕЙНЫХ
СТАЦИОНАРНЫХ
ЦЕПЕЙ
И СИСТЕМ**

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
УРАЛЬСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. С. М. КИРОВА

Н. И. КИРСАНОВ

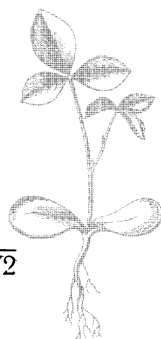
Основы теории линейных стационарных цепей и систем

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Часть I

Издание УПИ

Свердловск 1972



Scan AAW

Н. И. Кирсанов. **Основы теории линейных стационарных цепей и систем**, ч. I. Издание УПИ им. С. М. Кирова, 1972, 96 стр. (Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова).

В учебном пособии, написанном в соответствии с программой курса «Основы теории цепей», рассмотрены основные понятия и определения, относящиеся к цепям и системам, математические методы нахождения амплитуд и фаз электрических величин в линейных цепях при синусоидальном и экспоненциальном воздействиях.

Основное внимание уделено вопросам анализа линейных стационарных систем и цепей с единой системно-информационной точки зрения; вводятся понятия об операторах системы, специальных функциях; более подробно рассмотрены цепи при экспоненциальном воздействии.

Книга предназначена для студентов радиотехнических факультетов всех специальностей и форм обучения. Она может быть использована также аспирантами и преподавателями при изучении основ теории цепей.

Рис. 61. Библ. 7 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие по курсу «Основы теории линейных стационарных цепей и систем» составлено с учетом программы, утвержденной учебно-методическим Управлением по вузам 23 марта 1965 г.

Развитие радиоэлектроники потребовало введения новых сведений в программы некоторых курсов. Это привело к изменению содержания теоретической подготовки студентов, поэтому оно несколько отличается от утвержденной программы.

Работа по данному курсу издается в двух частях. В первой части излагаются основные понятия, цепи синусоидального тока, символический метод, метод комплексной частоты. Во второй части будут изложены методы расчета цепей, включая расчет цепей методом переменных состояния.

Вначале дается определение системы как множества взаимосвязанных элементов, представляющих единое целое. Сущность системы проявляется в способе ее функционирования. Функция рассматривается как некоторый стабильный характерный признак системы, связанный с пропусканием и преобразованием сигнала.

Системы и цепи отличаются друг от друга не своей сложностью, а различными способами их представления и исследования. Понятие цепи связано с определением токов и напряжений в элементах. Понятие системы связано с преобразованием сигнала, с установлением соотношения между воздействием и откликом.

В учебном пособии вводятся и разъясняются такие понятия, как оператор системы и его собственные значения. Учитывая, что собственными функциями линейных стационарных систем являются экспоненциальные функции, вводится понятие комплексной частоты. Этим подготавливаются условия для исследования системных функций, исходя из свойств их нулей и полюсов.

Информационный подход тесно связан с системным. При информационном подходе основное внимание сосредоточивается на процессах преобразования, приема, передачи и использования информации (сигнала), а не энергии. Основное внимание обращается на переходные процессы, в основу которых положено составление и решение дифференциальных уравнений. В связи с этим в работе излагается расчет систем и цепей методом переменных состояния.

Теория электрических цепей входит как составная часть в электротехнику, радиотехнику и электропроводную связь, поэтому целесообразно ее выделить в самостоятельную дисциплину. В этом курсе не рассматриваются физические процессы с точки зрения теории электромагнитного поля. Главной задачей его является изучение основных свойств электрических цепей и систем, их анализ и синтез.

Системы связи можно в общем описывать, указав операции, выполняемые над заданными видами входных сигналов. Теорию связи с математической точки зрения можно рассматривать как теорию, изучающую различные виды операций над множествами. Главными из этих операций являются типовые линейные операции усиления, дифференцирования, сглаживания и задержки.

В учебном пособии учтен опыт чтения лекций по данному курсу на радиотехническом факультете Уральского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С. М. Кирова.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

§ 1. Ток и напряжение. Энергия и мощность

Физическими носителями сигналов в электрической цепи и системах являются ток и напряжение. Ток и напряжение — основные переменные величины, характеризующие состояние системы. Передача и преобразование сигналов производятся посредством изменения тока и напряжения в системе.

Электрический ток в проводящей среде — это упорядоченное движение электрических зарядов. Основным признаком электрического тока является появление магнитного поля, обусловленного этим током. Магнитное поле — это неотъемлемый признак или свойство (атрибут) электрического тока. Электрический ток через замкнутую поверхность S определяется скоростью изменения электрического заряда, содержащегося в объеме V , ограниченном этой поверхностью. На рис. 1 через V обозначен объем, который ограничен поверхностью S . Внутри объема содержится заряд q . Через замкнутую поверхность S текут электрические заряды, направления движения которых на рисунке указаны стрелками. Если весь ток, протекающий через поверхность S , обозначить через i , то будет справедливо следующее равенство:

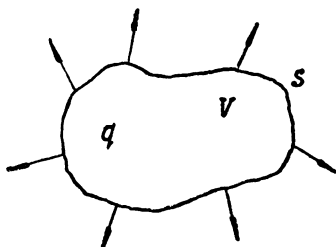


Рис. 1. Определение тока.

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1)$$

В системе СИ ток является основной единицей и измеряется в амперах (a), заряд q измеряется в кулонах (k), а время t — в секундах ($сек$).

Выражение (1) численно определяет величину тока. Для случая, когда электрические заряды протекают через поперечное сечение проводника, это выражение надо понимать следующим образом. Ток численно равен пределу отношения количества электричества, переносимого заряженными частицами сквозь рассматриваемое сечение

проводника за некоторый промежуток времени, к этому промежутку времени, когда он стремится к нулю:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (2)$$

Электрическому току приписывается направление. За направление тока принимают направление перемещения положительных зарядов. Направление тока характеризуется знаком тока. О положительном и отрицательном токах можно говорить только в том случае, когда заранее выбрано положительное направление как ориентир. Положительное направление тока выбирается произвольно и указывается стрелкой. Если после расчета, выполненного с учетом выбранного положительного направления, ток имеет знак плюс ($i > 0$), то это означает, что его направление совпадает с выбранным положительным направлением. В противном случае, когда ток отрицательный ($i < 0$), он направлен противоположно. Выражение (1) определяет мгновенное значение тока, т. е. значение тока в текущий момент времени t . Ток является функцией времени.

Следует отличать упорядоченное движение электрических зарядов в твердых телах от движения зарядов в электронных приборах (конвекционный ток или ток переноса). По своей физической природе оба тока являются упорядоченным движением электрических зарядов.

Характерным отличием тока проводимости от других видов тока является то, что плотность тока проводимости при постоянной температуре проводника пропорциональна напряженности электрического поля E и линии тока совпадают с линиями напряженности электрического поля

$$j = \gamma E. \quad (3)$$

Ток переноса, или ток конвекции, есть явление переноса электрических зарядов, движущихся в свободном пространстве заряженными частицами или телами. Для тока переноса соотношение (3) несправедливо. В случае свободного движения заряженных частиц их ускорение пропорционально напряженности поля, в то время как соотношение (3) говорит о пропорциональности скорости заряженной частицы напряженности электрического поля. От тока, как упорядоченного движения электрических зарядов, следует отличать ток смещения в пустоте. Ток смещения в пустоте — это ток, определяемый скоростью изменения вектора электрического смещения D_0 . Этот ток не связан с упорядоченным движением зарядов. Плотность тока смещения в пустоте определяется равенством

$$j_{cm} = \frac{dD_0}{dt}, \quad (4)$$

где D_0 — вектор электрического смещения в пустоте; в системе СИ D измеряется в кулонах на квадратный метр (k/m^2).

Ток смещения впервые ввел Максвелл. Эта величина может быть названа током по его основному свойству: каждый ток порождает магнитное поле. При изменении вектора \mathbf{D}_0 появляется магнитное поле, обусловленное изменениями этого вектора. Если явления прохождения тока рассматриваются в диэлектрике, то плотность тока смещения определяется равенством

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (5)$$

где \mathbf{P} — вектор поляризованности диэлектрика.

При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность диэлектрика. При этом в веществе диэлектрика движутся элементарные частицы с электрическими зарядами, входящие в состав атомов и молекул вещества. Этот вид электрического тока в диэлектрике называют электрическим током поляризации. Так как в диэлектрике заряженные частицы не являются свободными и могут смещаться под действием электрического поля, то первоначально именно ток поляризации стали называть электрическим током смещения. Для диэлектрика вектор электрического смещения равен

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}. \quad (6)$$

С учетом последнего равенства выражение (5) можно переписать так:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}. \quad (7)$$

Наглядная интерпретация при современном состоянии науки току смещения в пустоте не может быть дана, так как нет детального представления о внутреннем строении электромагнитного поля и тех процессов, которые происходят в нем. Итак, **электрический ток** представляет собой явление движения заряженных частиц и изменения электрического поля во времени, сопровождаемые магнитным полем. Количественно ток определяется выражением (1). Это выражение справедливо для тока проводимости, переноса и поляризации. Величина тока в пустоте определяется равенством

$$i = \int_S \mathbf{j}_{\text{см}} d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{D}_0 d\mathbf{s}. \quad (8)$$

Электрический ток — это упорядоченное движение электрических зарядов и изменение вектора электрического смещения \mathbf{D} .

Для введения понятия напряжения на участке цепи рассмотрим некоторый участок цепи (рис. 2). Предположим, что вокруг участка цепи отсутствует электромагнитное поле. Это означает, что участок

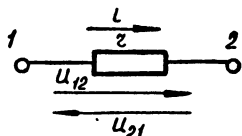


Рис. 2. Участок электрической цепи с выбранными положительными направлениями тока и напряжения.

цепи находится в стационарном поле. Такое поле называется потенциальным. Напряжение на участке цепи можно определить через разность потенциалов следующим образом.

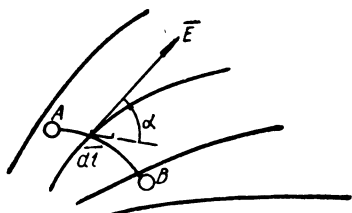


Рис. 3. Определение электрического напряжения.

Разность электрических потенциалов точек 1 и 2 называется **напряжением** на данном участке цепи. Если обозначить потенциал точки 1 через φ_1 , а потенциал точки 2 через φ_2 , то напряжением u будут величины:

$$\begin{aligned} u_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2; \\ u_{21} &= \varphi_2 - \varphi_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Понятие разности потенциалов применимо только к потенциальным полям и имеет более узкий смысл, чем понятие «напряжение», применимое к любым электрическим полям.

Электрическое напряжение представляет собой физическую величину, характеризующую электрическое поле вдоль рассматриваемого пути и равную линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого пути (рис. 3):

$$u_{AB} = \int_A^B E \cos \alpha \, dl = \int_A^B E \, dl, \quad (10)$$

где E — вектор напряженности результирующего электрического поля, который создается неподвижными электрическими зарядами, сторонними силами неэлектрического происхождения и переменным магнитным полем;

dl — вектор элементарного пути;

A и B — точки начала и конца пути;

α — угол между векторами.

Разность потенциалов применима только для потенциальных полей, когда она не зависит от путей интегрирования. Напряжение применимо для любых полей, т. е. в общем виде оно зависит от пути интегрирования. Нельзя при переменном токе говорить о напряжении между какими-либо двумя точками цепи, в частности, о напряжении на зажимах цепи как вполне определенной величине. Следует говорить о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного заданного пути между ними.

Значение напряжения в текущий момент времени называется **мгновенным значением** напряжения и обозначается через $u(t)$. Для придания определенного смысла знаку напряжения на рассматриваемом участке цепи для напряжения так же, как и для тока, произвольно выбирается положительное направление. Чаще всего его выбирают совпадающим с положительным направлением тока и указывают стрелкой.

Если потенциал точки 1 выше потенциала точки 2 (см. рис. 2), то u_{12} является положительной величиной, в противном случае оно отрицательно. Порядок расположения индексов у напряжения u_{12} , который соответствует расположению точек цепи, отвечает положительному направлению, выбранному для напряжения. Так, например, напряжение, отсчитываемое в положительном направлении тока, равно u_{12} , в обратном направлении оно имеет противоположный знак $u_{21} = -u_{12}$.

Все измерения в цепи основаны на использовании части энергии цепи или системы. В связи с этим очень важно ввести понятие об энергии и мощности в электрической цепи. Если через элемент цепи под воздействием приложенного напряжения u проходит электрический заряд dq , то поступающая в приемник элементарная энергия равна

$$dw = u dq = u i dt. \quad (11)$$

Скорость поступления в цепь электрической энергии в данный момент времени называется **мгновенной мощностью**, или иначе: мгновенная мощность — это скорость преобразования одной формы энергии в другую ее форму. Она равна производной энергии по времени:

$$p = \frac{dw}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui. \quad (12)$$

Мгновенная мощность p положительна при одинаковых знаках u , i и отрицательна при противоположных знаках.

Если положительные направления для напряжения и тока приняты совпадающими, то при $p > 0$ энергия поступает в приемник, а при $p < 0$ она возвращается из участка цепи к источнику.

Энергия, поступающая в приемник за время от t_1 до t_2 , определяется выражением:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt. \quad (13)$$

В системе СИ работа и энергия измеряются в джоулях (дж), мощность p — в ваттах (вт).

§ 2. Элементы, цепи и системы

Элементы цепей можно определить через их энергетические свойства. Под **элементами цепи** будем понимать индивидуализированные компоненты цепи, обладающие каким-либо одним физическим свойством. **Цепь** представляет группу соединенных и взаимодействующих между собой элементов цепи. В результате взаимодействия цепь обладает новыми свойствами по сравнению с элементами, из которых она состоит.

Система так же, как и цепь, есть множество взаимосвязанных элементов, выступающих как единое целое. Системы и цепи отличаются друг от друга разными формами представления и способами их исследования. Понятие цепи связано с определением токов и напряжений в элементах. Понятие системы связано с операционным преобразованием сигнала. Системы и цепи определяются своими элементами, структурой, состоянием, функциями и теми процессами, которые протекают в системе и цепи.

Элемент цепи — это идеализированная модель физически существующей части устройства, которой приписаны определенные электрические и магнитные свойства. Эти

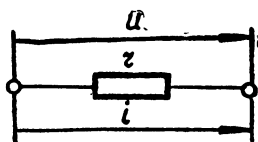


Рис. 4. Элемент сопротивления и его условное обозначение.

свойства в основном должны отображать явления, происходящие в реальных устройствах. По энергетическому признаку элементы цепи разделяются на **активные** и **пассивные**. К активным элементам относятся **генераторы, батареи, электронные лампы, транзисторы** и др. К основным пассивным элементам относятся: **сопротивление, индуктивность** и **емкость**, а также обратные им

величины: **проводимость** и **инверсные индуктивность и емкость**.

Каждый элемент цепи характеризуется своей качественной и количественной стороной. Качественная сторона элемента характеризует его физические свойства. Физические свойства элемента определяют его назначение и функцию. С количественной стороны элементы характеризуются своими параметрами. **Параметром элемента** называется количественная характеристика элемента. Для обозначения физических свойств элемента и его параметров используются одни и те же символы и условные знаки (буквы).

Сопротивление с качественной стороны может быть определено как элемент цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электромагнитной энергии движущихся электрических зарядов в другие виды энергии. Необратимый процесс в естественных условиях протекает только в одном направлении. Необратимыми процессами, например, являются процесс преобразования энергии движущихся электрических зарядов в проводнике в тепло, процесс излучения антенной электромагнитных волн.

Сопротивление с количественной стороны характеризуется своим параметром, т. е. численной характеристикой. Сопротивление как параметр можно определить следующим выражением:

$$r = \frac{u(t)}{i(t)}, \quad (14)$$

где $u(t)$ — мгновенное значение напряжения, приложенное к сопротивлению r .

$i(t)$ — ток проводимости, протекающий через элемент в тот же момент времени t .

На рис. 4 изображен элемент сопротивления. Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью:

$$g = \frac{1}{r} = \frac{i}{u}. \quad (15)$$

В системе единиц СИ сопротивление измеряется в омах (*ом*), а проводимость — в сименсах (*сим*).

Сопротивление постоянному току называется омическим сопротивлением. Сопротивление переменному току называется активным сопротивлением.

Мгновенная мощность, развиваемая на сопротивлении r , численно равна скорости преобразования поступающей электрической энергии в тепловую:

$$p_r = ui = ri^2 = gu^2. \quad (16)$$

Электрическая энергия, поступающая в сопротивление r и превращенная в тепло за время $\Delta t = t - t_1$, определится выражением

$$w_r = \int_{t_1}^t p_r dt = \int_{t_1}^t ri^2 dt = \int_{t_1}^t gu^2 dt. \quad (17)$$

Если ток равен постоянной величине I , тогда

$$w_r = rI^2(t - t_1). \quad (18)$$

Выражение (18) является математической записью закона Джоуля — Ленца в интегральной форме. Если (18) продифференцировать по времени, то получим выражение для мгновенной мощности

$$p_r = \frac{dw_r}{dt} = rI^2. \quad (19)$$

Индуктивность с качественной стороны можно определить как элемент цепи, обладающий свойством накапливать энергию в виде энергии магнитного поля. Энергия магнитного поля — это энергия либо движущихся электрических зарядов либо изменяющегося электрического поля. Индуктивность как параметр численно определяется выражением

$$L = \frac{\Psi}{i}, \quad (20)$$

где Ψ — потокосцепление самоиндукции, *вб*.

Инверсная индуктивность определяется как величина, обратная L :

$$\Gamma = \frac{1}{L} = L^{-1}. \quad (21)$$

Потокосцеплением самоиндукции цепи называется сумма произведений магнитных потоков, обусловленных только током в этой цепи, на число витков, с которыми они сцеплены.

Если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком Φ (рис. 5), то потокосцепление самоиндукции цепи равно

$$\Psi = n\Phi, \quad (22)$$

где n — число витков;

Φ — магнитный поток самоиндукции, вб .

Магнитный поток связан следующим соотношением с магнитной индукцией \mathbf{B} :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (23)$$

Модуль магнитной индукции является плотностью магнитного потока в данной точке:

$$B = \frac{d\Phi}{dt} \quad (24)$$

при условии, что угол между векторами \mathbf{B} и $d\mathbf{S}$ равен нулю. Магнитная индукция в системе единиц СИ измеряется в теслах (тл).

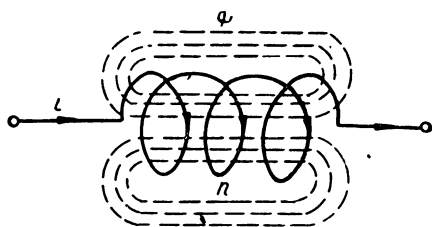


Рис. 5. Потокосцепление самоиндукции цепи $\Psi = n\Phi$.

Если все витки пронизаны одним и тем же магнитным потоком, то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков. В системе единиц СИ индуктивность измеряется в генри (гн), поток и потокосцепление в веберах (вб). Индуктивность зависит от геометрических величин d , определяющих размеры и форму контура,

а также от абсолютной магнитной проницаемости μ среды, в которой существует магнитное поле $L = F(d, \mu)$. В случае однородной среды с $\mu = \text{const}$, $L = \mu f(d)$.

Мгновенная мощность, развиваемая на индуктивности L , равна

$$p_L = u_L i = L \frac{di}{dt} i. \quad (25)$$

Мгновенная мощность на индуктивности численно равна мгновенной скорости преобразования электромагнитной энергии в энергию магнитного поля элемента индуктивности.

В свою очередь, энергия магнитного поля в произвольный момент времени t определяется формулой

$$w_L = \int_{-\infty}^t p dt = d \left(\int_0^t \frac{Li^2}{2} \right) = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (26)$$

При получении данной формулы принято, что при $t = -\infty$ ток в индуктивности $i(-\infty) = 0$.

Емкость с качественной стороны определяется как элемент, обладающий свойством накапливать электрическую энергию. **Емкость как параметр** численно определяется следующим выражением:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad (27)$$

где q — электрический заряд изолированного тела;
 φ — потенциал этого тела.

Инверсная емкость определяется как величина, обратная C :

$$D = \frac{1}{C} = C^{-1}. \quad (28)$$

Электрическая энергия накапливается в виде энергии неподвижных электрических зарядов. Если потенциал земли принять равным нулю, то выражение (27) можно переписать в виде

$$C = \frac{q}{u}, \quad (29)$$

где u — напряжение проводника относительно земли.

В системе единиц СИ емкость измеряется в фарадах (ϕ). Выражение (29) для емкости справедливо в том случае, если диэлектрическая проницаемость изолирующей среды, окружающей заряженное проводящее тело, не зависит от напряженности электрического поля. В этом выражении потенциал в бесконечности принят равным нулю.

Электрическая емкость уединенного тела зависит от геометрических величин, определяющих форму и размер тела, и от абсолютной диэлектрической проницаемости (ϵ) диэлектрика, его окружающего, $C = F(d, \epsilon)$. Если диэлектрик однороден, то $C = \epsilon f(d)$. В случае двух проводящих тел, окруженных диэлектриком, при условии, что их заряды равны и противоположны по знаку, т. е. $q_1 = -q_2$, разность потенциалов этих тел пропорциональна заряду одного из них. Следовательно, величина

$$C = \frac{q_1}{u_1 - u_2} = \frac{q_2}{u_2 - u_1} \quad (30)$$

называется электрической емкостью между этими телами. Она зависит от геометрических величин, определяющих форму, размеры и взаимное расположение тел, а также от абсолютной диэлектрической проницаемости диэлектрика $C = F(d, \epsilon)$. В случае однородного диэлектрика $C = \epsilon f(d)$. Так как $C > 0$, то в формуле емкости между телами берется заряд того тела, от которого отсчитывается разность потенциалов.

Мгновенная мощность на емкости численно равна мгновенной скорости преобразования электромагнитной энергии в энергию электрического поля элемента емкости:

$$p_C = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt}. \quad (31)$$

Если к емкости C приложено напряжение u_C , то энергия электрического поля в момент t определяется формулой

$$w_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_0^{u_C} C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (32)$$

Здесь учтено, что при $t = -\infty$ напряжение на емкости $u_C(-\infty) = 0$.

Следует обратить внимание на принципиальное различие, существующее между сопротивлением r , элементами индуктивности L и емкости C . В элементах L и C происходит обратимый процесс преобразования одной формы энергии в другую, в то время как в сопротивлении r этот процесс происходит необратимо. Элементы, как накопители электрической или магнитной энергии, называются реактивными элементами. В реактивных элементах энергия локализуется, т. е. сосредотачивается около элемента и связана с ним. При необратимом преобразовании энергия теряет связь с элементом. Так как в реактивных элементах энергия связана с элементом, то его состояние в момент времени t определяется не только воздействием на него в тот же момент времени, но и воздействием в предшествующий, более ранний момент времени $t - \Delta t$. Такие элементы называются элементами с памятью. В элементах с памятью можно хранить информацию. Так как процесс накопления энергии не может происходить мгновенно, то энергоемкие накопители обладают свойством инерции. Это свойство инерции реактивных элементов играет исключительную роль в процессах преобразования сигнала. Именно с этим свойством элементов связаны фильтрующие свойства цепей, их избирательность, возможность генерирования колебаний и т. д.

Состояние такого элемента как сопротивление в момент времени t определяется только воздействием на этот элемент в тот же момент времени t . Такой элемент является элементом без памяти; он не может сохранять какой-либо уровень энергии.

Если два индуктивных элемента связаны общим магнитным потоком, то они, кроме параметров L_1 и L_2 , обладают параметром M , называемым **взаимной индуктивностью**. Поток, сцепляющийся со вторым контуром и определяемый током в первом контуре, называется потоком взаимной индукции.

Взаимная индуктивность как параметр (рис. 6) определяется выражением

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}, \quad (33)$$

где Ψ_{12} — потокосцепление первого элемента, обусловленное током второго элемента;

Ψ_{21} — потокосцепление второго элемента, обусловленное током первого элемента.

Первый индекс всегда указывает, с какой цепью рассматривается сцепление потока.

Таким образом, взаимная индуктивность представляет собой отношение потокосцепления взаимной индукции одного из элементов к току в другом элементе. Она зависит от геометрических величин d , определяющих размеры и форму контуров, и их взаимного расположения, а также от абсолютной проницаемости μ среды.

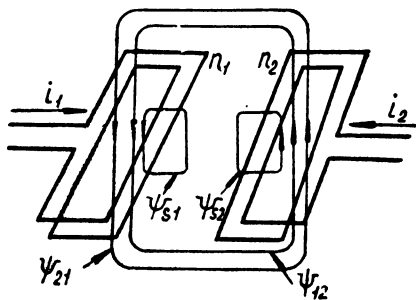


Рис. 6. Взаимная индукция двух частей цепи.

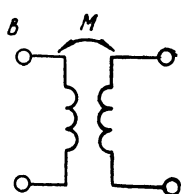


Рис. 7. Пассивные элементы схем электрических цепей:

a — индуктивность L ; b — емкость C ; c — взаимная индуктивность M .

Если между элементами цепи с индуктивностью существует магнитная связь, определяемая взаимной индуктивностью M , то в первом и втором элементах наводится э. д. с. взаимной индукции:

$$\begin{aligned} e_{1M} &= - \frac{d\Psi_{12}}{dt}; \\ e_{2M} &= - \frac{d\Psi_{21}}{dt}. \end{aligned} \quad (34)$$

Измеряется M , как и индуктивность, в генри. Коэффициент взаимной индукции, называемый взаимной индуктивностью, отнесем к четвертому элементу цепи.

На рис. 7 изображено обозначение пассивных элементов схемы электрических цепей: L , C и M .

К активным элементам цепи относятся источники э. д. с. и тока. **Источником э. д. с.** называется такой элемент цепи, на зажимах которого поддерживается напряжение в соответствии с заданным законом, независимо от потребляемого тока, пока ток имеет конечное значение. Внутреннее сопротивление источника э. д. с. равно нулю. Параметром источника является величина и закон изменения напряжения. При коротком замыкании источника э. д. с. теряет смысл.

Источником тока называется такой элемент, через который протекает ток в соответствии с заданным законом независимо от раз-

ности потенциалов на его зажимах. Источник тока — это источник с бесконечно большим внутренним сопротивлением. Параметром источника тока является величина и закон изменения тока источника. Условные обозначения источников тока и э. д. с. приведены на рис. 8.

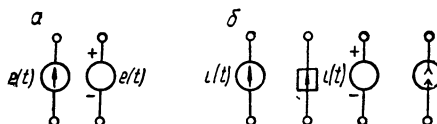


Рис. 8. Условные обозначения источников:

а — э. д. с.; б — тока.

Стрелкой или знаком «+» и «—» указано положительное направление э. д. с., т. е. направление возрастания потенциала в источнике для тех моментов времени, в течение которых функция $e(t)$ положительна. Стрелки у источников тока или знаки «+» и «—» указывают направление движе-

ния положительных зарядов для тех моментов времени, в течение которых $i(t)$ положительная величина.

Определим структуру цепи. Под **структурой цепи** понимаются отношения и связи, которые существуют между элементами. Структура определяет порядок, в котором расположены элементы, а порядок имеет гораздо большее значение, чем сами элементы. Структура цепи определяется ее геометрическим образом, который в свою очередь определяется ее геометрическими элементами. К геометрическим элементам цепи относятся **ветвь, узел и контур**.

Любая группа конечного числа элементов, которые могут быть скомбинированы так, что образуют цепь с двумя зажимами, называется **ветвью** (рис. 9, а). Простейшая ветвь состоит из одного элемента (рис. 9, б).

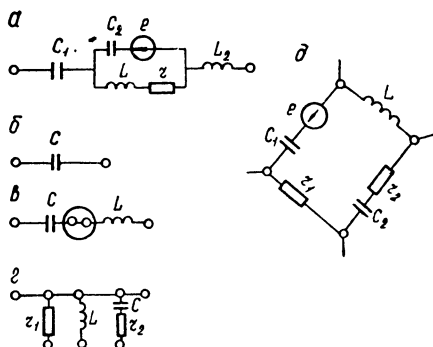


Рис. 9. Геометрические элементы цепи:

а, б — ветвь; в — устранимый узел; г — неустраиваемый узел; д — контур.

Соединение двух ветвей в общей точке образуют **устраиваемый узел** (рис. 9, в). Соединение более двух ветвей в общей точке образуют **неустраиваемый узел** (рис. 9, г). Замкнутая цепь из ветвей называется **контуром** (рис. 9, д).

Геометрический образ цепи называется **графом**. **Граф** — это изображение схемы электрической цепи, в котором ветви изображаются линиями, узлы — вершинами (точками), источники напряжения замкнуты, а источники тока разомкнуты. В графе сохраняются все ветви и все узлы данной схемы. Граф содержит всю информацию, относящуюся к геометрической структуре соединения ветвей (рис. 10).

Из приведенных определений элементов цепи следует, что параметры этих элементов фактически отражают в интегральной форме конфигурацию электрических и магнитных полей, связанных с рассматриваемыми цепями, и физические свойства среды, в которой существуют эти поля.

Электрические цепи — это цепи, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении. Практически такая возможность возникает вследствие того, что мы обычно стремимся создать определенные достаточно узкие пути для электрического тока, располагая вдоль этих путей проводники, окруженных хорошо изолирующей средой.

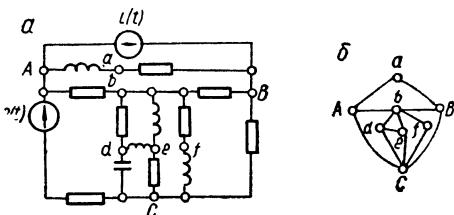


Рис. 10. Электрическая цепь (а) и ее граф (б).

§ 3. Реальные элементы цепей. Схемы замещения

К реальным элементам электрических цепей относятся **резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, источники питания** (батареи, аккумуляторы, генераторы и др.). Эти реальные элементы относятся к классу приборов, т. е. изделий, имеющих самостоятельное эксплуатационное назначение. Резистор по своим основным свойствам приближается к сопротивлению, катушка индуктивности — к индуктивности, конденсаторы — к емкости. Параметры реальных элементов могут зависеть от времени, величины приложенных напряжений и токов, от частоты, размеров, а также от внешних условий: температуры, влажности, давления. В общем случае зависимость параметров от этих величин является сложной и ее, как правило, не удастся точно установить. В связи с этим реальные элементы при расчетах заменяют их эквивалентом, схемой замещения.

Расчетный эквивалент или схема замещения должны удовлетворять, по крайней мере, двум требованиям: 1) максимально отражать наиболее важные при данных условиях свойства реального элемента, 2) быть достаточно простыми, допускающими доведения математического расчета до конца.

Под **электрической схемой** понимается графическое изображение цепи. **Схемой замещения** называется такая схема, которая по своим свойствам по какому-либо параметру или функции цепи при данных условиях (чаще всего при заданной частоте переменного тока) способна заменить реальную схему или прибор.

От схемы замещения следует отличать эквивалентную схему. Две разные схемы называются **эквивалентными**, если они по своим

свойствам по какому-либо параметру или функции совпадают во всем спектре частот переменного тока.

При построении схем замещения не рассматривается действительно возможная частотная зависимость отдельных элементов ее и не принимается во внимание даже самая возможность физического осуществления подобной схемы.

Найдем схему замещения резистора. При прохождении тока через резистор происходит процесс необратимого преобразования электромагнитной энергии в тепловую. Это основное свойство рези-

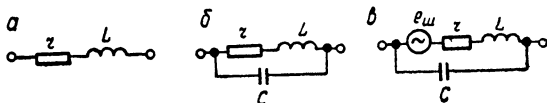


Рис. 11. Схемы замещения резистора.

сторов. Оно будет отражено введением в схему активного сопротивления. При прохождении тока через резистор вокруг него создается магнитное поле, а это значит, что резистор обладает собственной индуктивностью (рис. 11, а). Величина индуктивности определяется конструкцией токопроводящего элемента и выводов.

К резистору приложено напряжение. Это значит, что его точки, расположенные по длине, находятся под различным значением потенциала. Между точками существует электрическое поле. В поле сосредоточено определенное количество электрической энергии. Поэтому резистор обладает емкостью. Схема замещения резистора с учетом собственных индуктивности и емкости представлена на рис. 11, б.

При протекании электрического тока в сопротивлении возникает переменная электродвижущая сила, источником которой являются тепловые флуктуации электронов, а также изменение контактов между отдельными частицами, из которых состоит токопроводящий слой. Если сопротивление включить на вход чувствительного усилителя, то действие э. д. с. проявится на выходе в виде шумов. Величина шумов резистора зависит от температуры и величины сопротивления.

Таким образом, схема замещения резистора (рис. 11, в) получилась довольно сложной. В зависимости от целей и задач расчета схема может быть упрощена. Так, например, если напряжение сигнала намного больше напряжения шума, то последним можно пренебречь. Тогда схему замещения можно принять без источников э. д. с. шума. На средних и высоких частотах влиянием емкости также можно пренебречь. В этом случае схема замещения резистора принимает первоначальный вид (см. рис. 11, а) и чаще всего используется при расчетах. Важно отметить, что и величина сопротивления резистора зависит от частоты и температуры. С увеличением частоты вслед-

ствие поверхностного эффекта и эффекта близости величина сопротивления увеличивается.

Если частота изменяется в широких пределах, то и r будет изменяться значительно. Собственная индуктивность и емкость также будут зависеть от частоты. Отсюда и вытекает утверждение о том, что схема замещения эквивалентна реальному элементу не во всем спектре частот, а только в узкой полосе частот.

Анализ различных схем радиоаппаратуры показывает, что резисторы составляют 16—50% от общего числа элементов практических схем. При изготовлении резисторов прежде всего стремятся к тому, чтобы они по своим физическим свойствам максимально приближались к сопротивлению как элементу цепи. Хотя сопротивление определено как элемент цепи, на котором происходит необратимый процесс превращения электромагнитной энергии в тепловую, тем не менее, сопротивление по своим функциям и назначению включается в цепь не для выделения тепла. Сопротивление в качестве нагревателя очень редко используется в радиотехнических схемах. Более того, это свойство сопротивления — явление крайне нежелательное. Сопротивление как элемент цепи выполняет следующие основные функции: а) изменяет масштаб воздействия, уменьшая его; б) совместно с другими элементами цепи дает возможность синтезировать оператор с заданным функциональным преобразованием сигнала, или иначе совместно с элементами L и C формирует нужные функции системы; сопротивление в общем случае в цепи выполняет роль демпфера (успокоителя), обеспечивая устойчивость цепи. Иначе этот элемент называют диссипативным элементом, т. е. таким элементом, который связан с потерей энергии (диссипация — рассеивание).

Катушка индуктивности прежде всего должна обладать свойством индуктивности элемента, т. е. она должна иметь определенное значение L .

Каждая катушка имеет сопротивление намотки. Это сопротивление обозначим r_L . Далее между отдельными витками катушки, а также между витками, с одной стороны, сердечником, экраном и другими элементами конструкции устройства, с другой стороны, существуют распределенные емкости. Все эти емкости можно заменить эквивалентной емкостью. В зависимости от конструкции катушки ее собственная емкость C_0 может составлять от долей пикофарда до десятков пикофард.

Схема замещения катушки индуктивности с учетом собственной емкости приведена на рис. 12, где r_g — сопротивление потерь в диэлектрике собственной емкости.

Если катушка с магнитным сердечником, то необходимо учитывать потери в этом сердечнике. Если катушка закрыта экраном, то к перечисленным потерям прибавятся потери в экране.

Найдем схему замещения конденсатора. Каждый конденсатор, прежде всего, характеризуется своей емкостью C . Однако в конден-

саторе имеются потери. Они определяются свойствами используемого диэлектрика.

Каждый конденсатор обладает собственной индуктивностью, которая определяется конструкцией его выводов и обкладок (рис. 13).

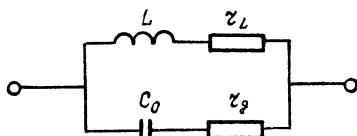


Рис. 12. Схема замещения катушки индуктивности.

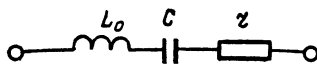


Рис. 13. Схема замещения конденсатора.

Появление собственной индуктивности у конденсатора можно объяснить тем, что при протекании тока по выводам и его обкладкам создается магнитное поле. Это магнитное поле имеет энергию, а следовательно, конденсатор обладает индуктивностью. Отсюда становится ясным, почему наибольшей индуктивностью обладают конденсаторы, имеющие длинные изогнутые выводы и длинные обкладки, свернутые в спираль.

Реактивные элементы L и C источниками шума не являются, так как они не поглощают тепло.

Реальные активные цепи, т. е. источники питания также должны заменяться схемой замещения при проведении расчетов. Прежде всего, каждый реальный источник электрической энергии имеет внутреннее сопротивление, характер и величина которого определяются типом источника и зависят от нагрузки. Кроме того, реальный

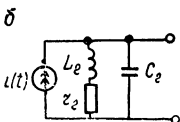
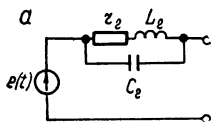


Рис. 14. Схема замещения реальных источников энергии:

а — э. д. с.; б — тока.

источник имеет внутренний шум. Схема замещения реальных источников энергии представлена на рис. 14. Реальный источник энергии по своим свойствам приближается к источнику э. д. с., если внутреннее сопротивление

источника много меньше сопротивления нагрузки. Реальный источник энергии по своим свойствам приближается к источнику тока, если внутреннее сопротивление его много больше сопротивления нагрузки. Схема замещения реального источника э. д. с. называется иногда схемой источника напряжения.

§ 4. Статические характеристики элементов цепи

Элементы цепи нами определены количественно через основные выражения (14), (20), (27). В этих выражениях одну из функций времени можно рассматривать как воздействие (причину), а вторую —

как отклик (следствие). Так, например, приложенное напряжение к сопротивлению можно рассматривать как воздействие (причину), а ток, вызванный этим напряжением, — отклик (следствие). Элемент, таким образом, выполняет функции некоторого оператора, преобразующего колебания одного вида в колебания другого вида. Зависимость, существующая между этими электрическими величинами на элементе цепи, называется **статической характеристикой элемента**.

Зависимость между током i , проходящим через активное сопротивление, и падением напряжения на нем называется **вольтамперной характеристикой** (рис. 15, а). Для индуктивности статической характеристикой является зависимость между током и полным магнитным

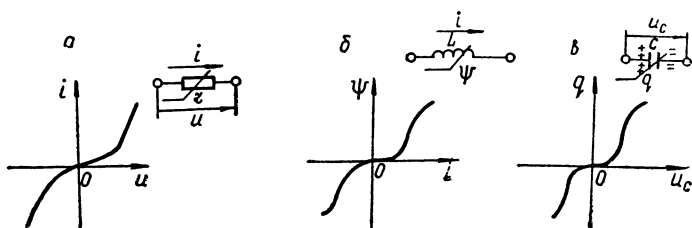


Рис. 15. Статические характеристики элементов цепи:
а — сопротивления; б — индуктивности; в — емкости.

потокосцеплением Ψ . Эту кривую называют **ампервеберной характеристикой** (рис. 15, б). Статическая характеристика емкости представляет собой зависимость между зарядом q и напряжением u . Она называется **вольткулонной характеристикой**.

Статические характеристики описывают свойство элементов цепи в зависимости от интенсивности воздействия. Под i , u , q , u_c , Ψ понимаются мгновенные значения величин. При этом в качестве испытательного воздействия используется постоянное напряжение или постоянный ток, значения которых можно изменять.

На рис. 15, а изображена вольтамперная характеристика нелинейного полупроводникового сопротивления. Такое сопротивление изготавливается из керамических полупроводников на основе карбида кремния SiC. Нелинейное полупроводниковое сопротивление называется варистором. На рис. 15, б изображена ампервеберная характеристика катушки с ферромагнитным сердечником. Вычерченная кривая соответствует первоначальной кривой намагничивания и не учитывает явление гистерезиса. На рис. 15, в изображена характеристика нелинейной емкости. Эта кривая совпадает с кривой первоначальной поляризации. Нелинейную емкость можно получить, если между обкладками конденсатора поместить сегнетовую соль в качестве диэлектрика. Все материалы, обладающие характеристиками, аналогичными сегнетовой соли, называются сегнетоэлектриками. К ним относятся титанат бария, титанат свинца и др. Нелинейные емкости с сегнетоэлектриками называются варикондами.

Нелинейные емкости, основанные на принципе использования явлений в электроннодырочном ($p-n$) переходе полупроводника, называются варикапами. Варикапы за последнее время получили широкое распространение в радиоэлектронной аппаратуре.

§ 5. Основные законы для элементов цепи. Линейные и нелинейные цепи

Зависимости между мгновенными значениями тока, напряжения и их производными на элементах цепи установлены экспериментально и определяются законами Ома, Фарадея и Максвелла.

Закон Ома справедлив только в том случае, когда сопротивление элемента r не зависит от величины и направления приложенного напряжения u . В этом случае имеется прямая пропорциональность, т. е. линейная зависимость между током и напряжением. Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника э. д. с., можно записать так:

$$i = \frac{u}{r}, \quad (35)$$

где u — напряжение на участке цепи.

На участке цепи без э. д. с. ток течет от более высокого потенциала к более низкому. Следовательно, потенциал точки 1 (φ_1) выше

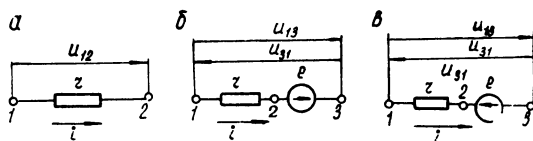


Рис. 16. Закон Ома для участка цепи:
а — без э. д. с.; б, в — для участка с э. д. с.

потенциала точки 2 (φ_2) на величину, равную произведению тока i на сопротивление r (рис. 16, а):

$$\varphi_1 = \varphi_2 + ir, \quad (36)$$

отсюда

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = ir,$$

т. е. напряжение на сопротивление равно произведению тока, протекающего по сопротивлению, на величину этого сопротивления.

Разность потенциалов на концах этого сопротивления, равная произведению ir , называется падением напряжения. Положительное направление падения напряжения совпадает с положительным направлением тока, протекающего по данному сопротивлению.

Рассмотрим участки цепи с сопротивлением и э. д. с. (рис. 16, б, в). Найдем разность потенциалов между точками 1 и 3 для этих участков.

По определению напряжения из выражения (9) получим,

$$u_{13} = \varphi_1 - \varphi_3. \quad (37)$$

Выразим потенциал точки 1 через потенциал точки 3. При перемещении от точки 3 к точке 2 идем навстречу э. д. с. (см. рис. 16, б), поэтому потенциал точки 2 оказывается ниже потенциала точки 3 на величину э. д. с.

$$\varphi_2 = \varphi_3 - e. \quad (38)$$

При перемещении от точки 3 к точке 2 (см. рис. 16, в) идем в направлении э. д. с. e и поэтому потенциал точки 2 оказывается выше, чем потенциал точки 3, на величину э. д. с. e

$$\varphi_2 = \varphi_3 + e. \quad (39)$$

Так как ток на участке без э. д. с. течет от более высокого потенциала к более низкому, то в обеих схемах (см. рис. 16, б, в) потенциал точки 1 выше потенциала точки 2 на величину падения напряжения в сопротивлении r

$$\varphi_1 = \varphi_2 + ir. \quad (40)$$

Таким образом, для цепи (см. рис. 16, б) имеем

$$\varphi_1 = \varphi_3 - e + ir$$

или

$$u_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = ir - e, \quad (41)$$

а для цепи (см. рис. 16, в) имеем

$$\varphi_1 = \varphi_3 + e + ir,$$

или

$$u_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = ir + e. \quad (42)$$

Положительное направление напряжения указывают на схеме стрелкой. Стрелка должна быть направлена от первого индекса ко второму. Из определения напряжения следует, что

$$u_{31} = \varphi_3 - \varphi_1,$$

тогда

$$u_{31} = -u_{13}.$$

Запишем закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с. (см. рис. 16, б):

$$i = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + e}{r} = \frac{u_{13} + e}{r}, \quad (43)$$

аналогично для схемы (см. рис. 16, в)

$$i = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - e}{r} = \frac{u_{13} - e}{r}. \quad (44)$$

В соответствии с полученными выражениями для закона Ома (35), (43) и (44) можно изобразить вольтамперную характеристику для цепи (рис. 17).

Следует обратить внимание, что рассматриваемый участок цепи (см. рис. 16, а) не имеет никаких источников между зажимами 1 и 2. Однако предполагается, что где-то в цепи имеется источник e , так что каждая точка цепи находится под определенным потенциалом относительно некоторой точки. Поэтому выражение напряжения для схемы можно записать так:

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \varphi_0). \quad (45)$$

Аналогичное выражение можно получить для схем рис. 16, б, в. **Уравнение закона электромагнитной индукции Фарадея** для элемента индуктивности можно записать так:

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d}{dt} (Li), \quad (46)$$

где e_L — э. д. с. самоиндукции.

Величину напряжения, противоположную э. д. с. самоиндукции, называют **приложенным напряжением** к индуктивности.

$$u_L = - e_L = \frac{d}{dt} (Li). \quad (47)$$

Знак минус в выражении (46) выбран ввиду того, что за положительное направление e_L принято положительное направление тока

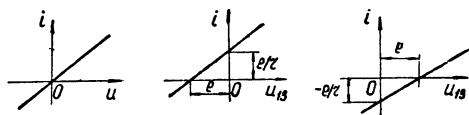


Рис. 17. Вольтамперные характеристики для цепей (см. рис. 16).

(учитывая, что L всегда положительная величина).

Закон электромагнитной индукции Фарадея связывает э. д. с. самоиндукции со скоростью изменения потокосцепления.

Соотношение между током через емкость и скоростью изменения заряда на обкладках емкости устанавливается равенством

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt}, \quad (48)$$

где u_C — приложенное напряжение к емкости;

i — ток через емкость понимается как ток смещения.

Это соотношение справедливо назвать **законом Максвелла**. Максвелл первый ввел понятие о токе смещения, протекающем через емкость. Величина тока смещения определяется скоростью изменения емкости и напряжения, приложенного к обкладкам емкости.

По признаку функциональной зависимости, существующей между током и напряжением на сопротивлении, между потокосцеплением и током на индуктивности, между зарядом и разностью потенциалов на емкости различают линейные и нелинейные элементы. Элементы цепи r , L , C называются **линейными**, если $i = f_r(u)$ на сопротивлении, $\Psi = f_L(i)$ на индуктивности и $q = f_C(u_C)$ на емкости являются линейными функциями. В противном случае эти элементы называются **нелинейными**. Статические характеристики линейных элементов

имеют вид прямой линии. Статические характеристики нелинейных элементов имеют вид кривой (см. рис. 15), а их условные обозначения приведены на рис. 18, *а*.

Линейные элементы можно определить иначе. Элементы цепи называются линейными, если параметры этих элементов не зависят от величины и направления тока, протекающего через них, или от величины и направления напряжения, приложенного к этим элементам.

Линейные элементы цепи в свою очередь разделяются на **параметрические** и **постоянные**. Линейный элемент называется параметрическим,

если величины r , L , C зависят от времени. На рис. 18, *б* изображено условное обозначение параметрических элементов. Если линейные элементы r , L и C не зависят от времени, то они называются элементами с постоянным значением параметра. В этом случае величины e_L и u_L равны

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \quad (49)$$

На основании выражения (49) ток в индуктивности равен

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \Gamma \int_{-\infty}^t u_L dt, \quad (50)$$

где $-\infty$ — нижний предел интеграла, так как до рассматриваемого момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго.

При $t=0_-$ ток в индуктивности определится выражением

$$i(0_-) = \Gamma \int_{-\infty}^{0_-} u_L dt. \quad (51)$$

Следовательно, зависимость (50) можно переписать так:

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_-} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{0_+}^t u_L dt$$

или

$$i = i(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_+}^t u_L dt, \quad (52)$$

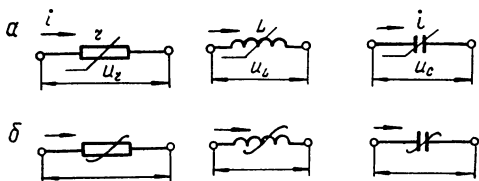


Рис. 18. Условные обозначения нелинейных (*а*) и параметрических (*б*) элементов: активного сопротивления, индуктивности, емкости.

т. е. в интервале времени от 0_+ до t ток в индуктивности изменится на величину $\frac{1}{L} \int_{0_+}^t u_L dt$, определяемую площадью, ограниченной

в этом интервале кривой напряжения u_L . Важно еще раз подчеркнуть, что приложенное напряжение к индуктивности прямо пропорционально скорости изменения тока, протекающего через индуктивность (49). Рассмотрим несколько примеров.

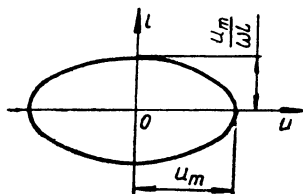


Рис. 19. Зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения на индуктивности при задающем косинусоидальном напряжении.

Пример 1. Пусть приложенное напряжение (воздействие) к индуктивности изменяется по синусоидальному закону:

$$u_L = U_m \cos \omega t \quad \forall t,$$

здесь \forall — квантор всеобщности, $\forall t$ читается: «для всех t ».

Тогда ток (отклик) через индуктивность в соответствии с (52) запишется так:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t \quad \forall t.$$

Установим соотношение между мгновенными значениями напряжения и тока на индуктивности. Для этого разделим u_L на U_m , а i на $\frac{U_m}{\omega L}$, затем возведем правую и левую части этих выражений в квадрат и сложим:

$$\frac{u^2}{U_m^2} + \frac{i^2}{(U_m/\omega L)^2} = 1,$$

получив уравнение эллипса (рис. 19).

Пример 2. Идеальный источник э. д. с. включен в цепь, как показано на рис. 20. Следует определить токи в сопротивлении при значениях $r=120 \text{ ом}$; в индуктивности при $L=0,5 \text{ гн}$ и общий ток i , отдаваемый источником, при условии (рис. 21, а), что

$$e_L(t) = E_m \sin \omega t \quad 0 < t \leq \frac{3}{4} T$$

$$e_L(t) = 0 \quad t < 0 \text{ и } t > \frac{3}{4} T,$$

где $E_m=12 \text{ в}$; $\omega=480 \text{ рад/сек}$.

Решение. Из закона Ома для тока в сопротивлении r имеем

$$i_r = \frac{e_L(t)}{r} = \frac{E_m \sin \omega t}{r} = 0,1 \sin 480 t a$$

при $0 < t \leq \frac{3}{4} T$. При других значениях t ток равен нулю (рис. 21, б).

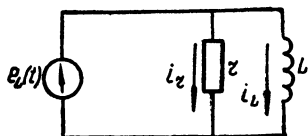


Рис. 20. Источник $e_L(t)$ подключен к цепи r и L .

Кривая тока для i_r аналогична кривой приложенного напряжения и отличается от последнего только масштабом.

Для нахождения тока в индуктивности i_L запишем соотношение

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e_L(t) dt = \\ &= \frac{1}{L} \int_{0+}^t e_L dt = \\ &= \frac{E_m}{L} \int_{0+}^t \sin \omega t dt \end{aligned}$$

при $i_L(0_-) = 0$.

Вычисляя интеграл и подставляя пределы, получим:

$$i_L = \frac{E_m}{\omega L} (1 - \cos \omega t) a$$

$$\text{для } 0 < t \leq \frac{3}{4} T;$$

$$i_L = \frac{E_m}{\omega L} a \text{ для } t > \frac{3}{4} T.$$

Или, подставляя численные значения, находим

$$i_L = \frac{12}{480 \cdot 0,5} (1 - \cos 480t) = 0,05 (1 - \cos 480t) a.$$

График тока i_L изображен на рис. 21, в. Общий ток находится как сумма токов $i = i_r + i_L$ (рис. 21, з). Если величина емкости не зависит от знака и величины напряжения, приложенного к ее зажимам, и, кроме того, не изменяется с течением времени, то ток через емкость определяется выражением

$$i = C \frac{du_c}{dt}. \quad (53)$$

В этом случае напряжение на емкости равно

$$u_c = u_c(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0+}^t i dt. \quad (54)$$

Выражение справедливо при условии, когда $i(t) = 0$ при $t < 0$. В выражении (53) $u_c(0_-)$ есть напряжение на емкости непосредственно до включения источника тока, а величина интеграла опреде-

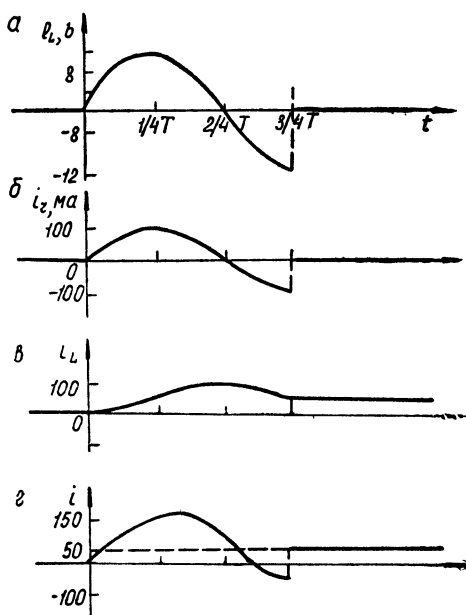


Рис. 21. Временные диаграммы для e_L , i_r , i_L и i .

ляет изменение напряжения на емкости при протекании тока $i(t)$ через емкость за время от 0_+ до t . Величина этого напряжения определяется площадью, ограниченной в этом интервале времени кривой тока.

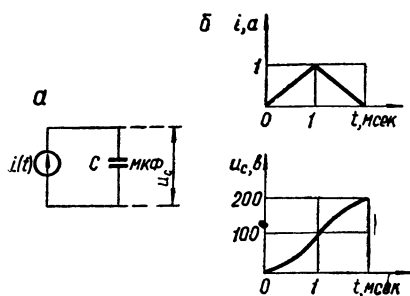


Рис. 22. Временные диаграммы для $i(t)$ и $u_c(t)$.

Пример 3. Идеальный источник тока присоединен к емкости (рис. 22, а). Форма кривой приложенного тока показана на рис. 22, б. Начертить график напряжения на емкости.

Напряжение на емкости связано с током (54)

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{0_+}^t i dt = 2 \cdot 10^5 \int_{0_+}^t i dt,$$

где $0_- = 0$ по условию.

Вычислим интеграл. Так как время измеряется в мсек, то для интеграла можно записать:

$$\int_{0_+}^t i dt = \frac{1}{10^3} \left(\int_{0_+}^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt \right) = \frac{1}{10^3} \kappa.$$

Окончательно для $u_c(2)$ получим (в скобках указан момент времени $t=2$ сек)

$$u_c(2) = \frac{2 \cdot 10^5}{10^3} = 200 \text{ в.}$$

§ 6. Основные законы для всей цепи

Выше были установлены законы, связывающие ток и напряжение или их производные на отдельных элементах цепи. Любая цепь состоит из элементов. Свойство такой цепи определяется ее элементами и структурой, а наиболее общими законами, справедливыми для цепи в целом, являются первый и второй законы Кирхгофа. **Первый закон Кирхгофа** является следствием закона сохранения электрического заряда. Его можно сформулировать двояко:

1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю.

2. Сумма сходящихся в любом узле токов равна сумме расходящихся от узла токов. Так, применительно к рис. 23, если сходящиеся к узлу токи считать положительными, а расходящиеся — отрицательными, то согласно первой формулировке

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 - i_5 + i_6 = 0; \quad (55)$$

согласно второй

$$i_1 + i_2 + i_6 = i_3 + i_4 + i_5. \quad (56)$$

С физической точки зрения первый закон Кирхгофа утверждает, что движение электрических зарядов в цепи происходит так, что ни в какой точке цепи или узле они не скапливаются.

Первый закон Кирхгофа применим к мгновенным значениям тока. Уравнения, составленные для токов по первому закону, называются узловыми уравнениями.

Второй закон Кирхгофа является следствием более общего закона сохранения энергии, распространенного на электрические цепи. Он так же, как и первый закон, имеет две формулировки:

1. Алгебраическая сумма падений напряжений в любом контуре равняется алгебраической сумме э.д.с. вдоль того же контура. Математически эту формулировку можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{i=1}^m e_i. \quad (57)$$

В каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если они не совпадают с ним.

2. Алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжения) вдоль любого замкнутого контура

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (58)$$

При составлении уравнений Кирхгофа предварительно необходимо: а) последовательно пронумеровать элементы; б) обозначить произвольным образом положительные направления токов в каждой ветви; в) выбрать положительное направление обхода контуров. Рекомендуется положительное направление обхода контуров выбирать одинаковыми для всех контуров, например, все по часовой стрелке.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Дана схема электрической цепи (рис. 24). В этой схеме в качестве воздействия или внешних сил рассматриваются токи i_1, i_2, i_3 источников тока, которые называются задающими токами.

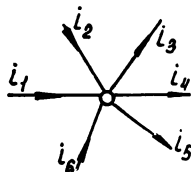


Рис. 23. Иллюстрация к первому закону Кирхгофа.

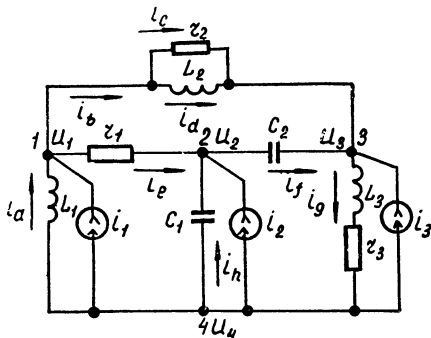


Рис. 24. Схема электрической цепи к примеру 4.

Величина и направление этих токов заданы. Откликом или реакцией системы будут напряжения в узлах u_1, u_2, u_3 и u_4 . Эти напряжения необходимо определить. Определить их можно, если воспользоваться законом Кирхгофа для составления узловых уравнений.

В соответствии с первым законом (вторая формулировка) Кирхгофа имеем:

для узла 1

$$i_a + i_1 = i_b + i_e;$$

для узла 2

$$i_e + i_2 + i_h = i_f;$$

для узла 3

$$i_f + i_b + i_3 = i_g;$$

для узла 4

$$i_g = i_a + i_1 + i_h + i_2 + i_3;$$

где $i_a, i_b, i_c, i_d, i_e, i_f, i_g, i_h$ — токи в ветвях.

Следует обратить внимание на то, что каждое из уравнений является следствием трех других. Для этого достаточно сложить любые три уравнения и тогда четвертое будет суммой трех.

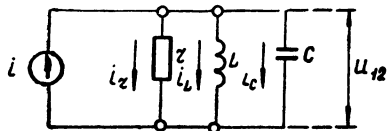


Рис. 25. Цепь с двумя узлами.

Задающие токи следует брать со знаком плюс, если они направлены к рассматриваемому узлу, и со знаком минус, если они направлены от узла.

Пример 5. Рассмотрим цепь, состоящую из параллельно соединенных элементов r, L и C . К цепи подключим источник тока. Требуется составить узловое уравнение (рис. 25).

Решение. На рисунке изображена цепь с двумя узлами. Воздействием является задающий ток i , откликом — узловое напряжение u_{12} . Узловое уравнение для узла 1:

$$i_r + i_L + i_C = i.$$

Для узла 2 уравнение будет аналогичным. Следовательно, независимое уравнение только одно: на единицу меньше числа неустраняемых узлов. В полученном уравнении заменим токи в правой части выражениями, в которые входит отклик:

$$\frac{u_{12}}{r} + C \frac{du_{12}}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u_{12} dt + i(0_-) = i.$$

Это интегро-дифференциальное уравнение относительно u_{12} . Рассмотрим примеры на составление уравнений по второму закону Кирхгофа.

Пример 6. На рис. 26 изображена схема с тремя контурами. Она имеет шесть ветвей с токами и четыре узла. В цепи воздействием являются э. д. с. Они заданы. Откликом являются токи в ветвях. Эти токи необходимо определить. Методы определения токов в

ветвях будут рассмотрены позднее. Сейчас в качестве примера составим уравнение для контура, в который входит ветвь a . На основе второго закона Кирхгофа можно записать:

$$i_a r_a + \frac{1}{C_a} \int_0^t i_a dt + u_{c_a}(0_-) + L_a \frac{di_a}{dt} + (u_1 - u_4) = e_a.$$

Подобных уравнений можно составить столько, сколько ветвей содержит цепь. Каждому неизвестному току ветви соответствует свое уравнение.

Пример 7. Рассмотрим цепь с последовательно включенными элементами r , L и C (рис. 27) и источником э. д. с. Воздействием

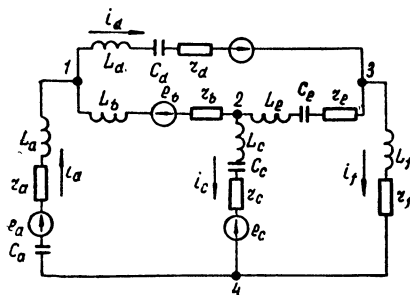


Рис. 26. Цепь с источниками э. д. с.

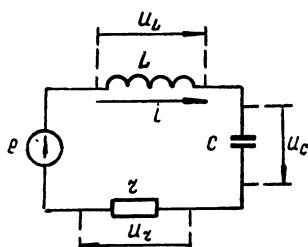


Рис. 27. Одноконтурная цепь с источниками э. д. с.

в этой цепи является источник э. д. с., откликом — ток. Цепь одноконтурная. Для определения отклика, т. е. тока в цепи составим уравнение

$$u_L + u_C + u_r = e.$$

Если напряжение на элементах цепи заменить через ток и параметры цепи, то получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0_-) + ir = e.$$

Если полученное уравнение продифференцировать по времени, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}.$$

Нам сейчас важно уяснить, что состояние системы в общем случае описывается дифференциальными уравнениями. Порядок дифференциального уравнения определяется числом независимых энергоемких накопителей, т. е. L и C . В примере 7 независимых энергоемких накопителей было два. Поэтому относительно реакции системы, т. е. тока получено дифференциальное уравнение второго порядка.

Однако надо иметь в виду, что сама по себе задача определения числа независимых элементов является довольно сложной задачей и имеет самостоятельное значение.

§ 7. Математическое определение линейных и нелинейных цепей. Принцип наложения

Дадим строгое математическое определение линейных и нелинейных цепей и определим их основные свойства.

С математической точки зрения цепь называется **линейной**, если она описывается линейными алгебраическими или интегродифференциальными уравнениями. Таким уравнением является, например, выражение

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t), \quad (59)$$

где a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 и x — непрерывные однозначные функции t на интервале $t_2 < t < t_1$.

В задачах анализа цепей переменная t есть действительная переменная времени. Из теоремы существования обыкновенных дифференциальных линейных уравнений следует, что при точно определенных



Рис. 28. Четырехполюсник с воздействием $x(t)$ и откликом $y(t)$.

границах для каждого $x(t)$ существует единственная функция $y(t)$, которая принимает данное значение в некоторый момент времени t_0 при $t_2 \leq t \leq t_1$, у которой первые $(n-1)$ — производные непрерывные и имеют определенные значения при $t=t_0$. В качестве воздействия $x(t)$ может быть приложенное напряжение или ток

одной пары зажимов, а реакцией или откликом $y(t)$ может являться ток или напряжение на другой (выходной) паре зажимов (рис. 28). Если эти две функции связаны дифференциальным уравнением (59), то система является линейной по отношению к этим зажимам.

В данном курсе рассматриваются дифференциальные уравнения только с постоянными коэффициентами. Физически это означает, что линейная система состоит из элементов L, C, r , которые во времени не изменяются. Такая система называется **стационарной**. Стационарная линейная система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Линейная система с меняющимися во времени параметрами L, C, r называется **нестационарной**, или **параметрической**.

Нелинейная система описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, в которых коэффициенты зависят и от самой функции (отклика) и от ее производных.

Основным свойством линейной системы является свойство независимости действия возмущений. Это свойство называется **принципом наложения или суперпозиции**. Сущность наложения поясним на следующем примере. Пусть отклик системы на воздействие $x_1(t)$ есть $y_1(t)$, а на воздействие $x_2(t)$ — $y_2(t)$. Символически запишем сказанное с помощью оператора

$$\begin{aligned} H[x_1(t)] &= y_1(t); \\ H[x_2(t)] &= y_2(t). \end{aligned} \quad (60)$$

Оператор H является линейным оператором, с помощью которого $x(t)$ преобразуется в $y(t)$.

В системе соблюдается принцип наложения, если справедливо условие линейности, которое в математической форме можно записать так:

$$H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1y_1(t) + a_2y_2(t). \quad (61)$$

Уравнение (61) является математическим выражением принципа наложения и свойства однородности, справедливых для линейных систем. Принцип наложения в соответствии с выражением (61) для $a_1 = a_2 = 1$ можно сформулировать так: эффект от суммы воздействий равен сумме эффектов от каждого воздействия порознь. Это и означает, что в линейной системе каждое воздействие действует на систему независимо от того, действуют ли на систему другие возмущения или нет. Принцип суперпозиции — это принцип независимости действия каждого возмущения.

Выполнимость принципа суперпозиции является основным признаком линейной системы. Даже в том случае, когда неизвестна структура системы и ее параметры, можно решить вопрос о линейности системы по выполнимости для нее принципа суперпозиции.

Принцип суперпозиции — основа практических расчетов линейных электрических цепей и систем с произвольно изменяющимися воздействиями. Свойство однородности в математической форме можно записать так:

$$H[a_1x_1(t)] = a_1H[x_1(t)]. \quad (62)$$

Таким образом, мы сформулировали условия линейности системы.

§ 8. Цепи с распределенными и сосредоточенными параметрами

При рассмотрении схем замещения резистора отмечалось, что с сопротивлением r всегда связаны магнитное (B) и электрическое (E) поля. Это означает, что сопротивление r нельзя сосредоточить в одной точке, оно распределено по всей цепи. Точно так же индуктивность и емкость принципиально распределены вдоль всей цепи. Например, нет такого участка цепи, который при прохождении по нему тока не охватывался бы магнитным потоком. Все реально су-

существующие цепи есть цепи с распределенными параметрами. **Цепь с распределенными параметрами** — это такая цепь, каждый элементарный участок которой одновременно обладает свойством сопротивления, индуктивности и емкости. В таких цепях происходят сложные физические процессы и их анализ существенно усложнен. Однако не во всех случаях необходимо учитывать всю сложность процессов, происходящих в таких цепях. В реальных цепях электрическое и магнитные поля, а также участки, связанные с необратимым преобразованием энергии, распределены неравномерно. Вот эта неравномерность и дает возможность в цепи выделить участки с преобладанием либо магнитного, либо электрического полей, либо участка, где электромагнитная энергия преимущественно превращается в тепло.

Электрическая цепь называется **цепью с сосредоточенными параметрами**, если элементы цепей сосредоточены каждый в отдельной точке. Цепи с сосредоточенными параметрами являются абстракцией. Приняв такую абстракцию, мы получаем возможность построить теорию электрических цепей с сосредоточенными параметрами, охватывающую огромный класс реальных электрических цепей. Можно ли принять такую абстракцию или нет, все зависит от геометрических размеров цепи, скорости протекания процессов в них и тех задач, которые мы сами ставим, исследуя эту цепь. Электрическую цепь можно рассматривать как цепь с сосредоточенными параметрами, если скорость изменения напряжений и токов в цепи столь мала, что за время распространения электромагнитных волн вдоль всей цепи в любом направлении изменения напряжений и токов остаются малыми по сравнению с полными их изменениями в исследуемом режиме. При периодических токах и напряжениях электромагнитные волны успевают пробежать вдоль всей цепи за ничтожную долю периода. Такое допущение означает, что мы принимаем геометрические размеры рассматриваемых цепей много меньше длины волны распространяющихся в них колебаний.

Процессы в цепях с распределенными постоянными математически описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Их решение приводит к волновым процессам. Процессы в цепях с сосредоточенными постоянными описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Решением таких уравнений являются функции одного аргумента (обычно времени). Поэтому такие функции описывают колебательный процесс.

§ 9. Классификация цепей и систем по числу входов и выходов. Воздействие и отклик системы. Оператор системы

Любая система может иметь несколько входов и выходов. **Входом системы** называются ее зажимы, на которые подается воздействие. При этом под воздействием понимается физический процесс,

действующий на входе системы и подлежащий преобразованию. **Выходом системы** называются ее зажимы, с которых снимается отклик. Это есть реакция системы на воздействие, следовательно, реакция системы это преобразованный системой процесс.

По числу входов и выходов системы разделяются на двухполюсники, трехполюсники, четырехполюсники и вообще n -полюсники (рис. 29).

В двухполюснике воздействием может быть источник тока либо источник напряжения, а откликом будут соответственно напряжение на зажимах двухполюсника либо ток, протекающий через зажимы двухполюсника. В самом общем виде воздействие можно обозначить через $x(t)$, где $x(t)$ есть функция времени, а отклик можно обозначить через $y(t)$, где $y(t)$ есть преобразованная системой функция. Таким образом, можно записать, что

$$y(t) = H[x(t), t]. \quad (63)$$

Операцию, сопоставляющую каждую функцию $x(t)$ из множества E с функцией $y(t)$ из множества F , называют **оператором**. Отличие оператора от функции состоит в том, что эти величины имеют разные области существования и разные области изменения: множество чисел — область существования и изменения функции; множество функций — область существования и изменения оператора. Система одну функцию времени преобразует в другую функцию времени. Такое преобразование называется функциональным преобразованием. Наиболее простыми видами линейных функциональных преобразований являются: усиление, дифференцирование, интегрирование, сдвиг во времени.

Пример 8. Рассмотрим простейшее функциональное преобразование усиления и определим оператор усилителя. Простейшие примеры усилителей приведены на рис. 30.

Усиление функционально можно определить как тип преобразований, при котором изменяется только масштаб воздействия или размерность входной величины. Операцию усиления математически можно записать так:

$$y(t) = Kx(t), \quad (64)$$

где K — постоянная величина, называемая коэффициентом усиления. Коэффициент усиления K может иметь любое действительное значение.

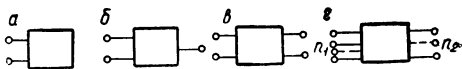


Рис. 29. Классификация систем по числу зажимов:

a — двухполюсники; $б$ — трехполюсники; $в$ — четырехполюсники; $г$ — n -полюсники ($n=n_1+n_2$).

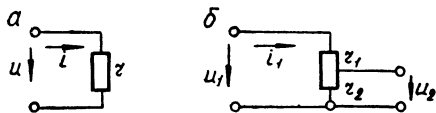


Рис. 30. Простейшие усилительные звенья.

ние и любую размерность в зависимости от размерностей $y(t)$ и $x(t)$. Из выражения (64) следует, что оператором при усилении является коэффициент усиления K вместе со знаком умножения $H = K \cdot \{ \cdot \}$.

Если на схеме рис. 30, а напряжение u , поданное на активное сопротивление r , принять за входную величину, а ток i — за выходную, то получим усилитель с коэффициентом усиления $K = \frac{1}{r}$, имеющий размерность проводимости, так как в этом случае выражение (64) можно представить в виде

$$i = \frac{1}{r} u.$$

Для схемы рис. 30, б величины входная u_1 и выходная u_2 связаны соотношением

$$u_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} u_1.$$

Коэффициент усиления в данном примере является безразмерной величиной меньше единицы, а оператор системы определится выражением

$$H = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \{ \cdot \}.$$

§ 10. Понятие об элементарных функциях. Специальные функции

Задача определения выходного сигнала по заданному входному порой встречает значительные трудности. Эти трудности можно преодолеть, если воспользоваться принципом наложения. В основе при-

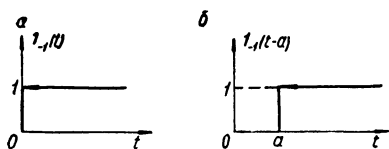


Рис. 31. Единичная ступенчатая функция.

менения этого принципа лежит следующая идея. Естественно предположить, что для входных сигналов определенного вида реакцию системы определить проще, чем при произвольном входном сигнале. Поэтому для линейных систем нужно выразить данный произвольный входной сиг-

нал в виде суммы элементарных функций, если для каждой элементарной функции реакция системы известна или может быть определена при произвольном входном сигнале на основе принципа наложения.

Принцип наложения практически становится эффективным, если соблюдаются два условия:

1. Существует метод, позволяющий легко представить любое входное воздействие в виде суммы элементарных функций, каждую

со своим весом, т. е. числовым коэффициентом. Причем, чем легче определяются эти числовые коэффициенты, тем эффективнее метод.

2. Существует метод, позволяющий легко определять реакцию произвольной линейной системы на элементарную функцию.

Наиболее широкое распространение получили элементарные функции класса **единичных ступенчатой и импульсной функций и синусоидальной функции**. Как будет видно из дальнейшего, первые функции положены в основу временного анализа, а вторые (синусоидальные) положены в основу спектрального метода анализа систем и цепей.

Под единичной функцией Хевисайда понимается функция действительного аргумента, которая тождественно равна нулю при $t < 0$ и равна единице при $t > 0$. Аналитически единичную функцию можно записать так:

$$1_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (65)$$

В нуле функция не определена. Графически эта функция представлена на рис. 31, а. Единичную функцию часто обозначают в виде $1(t)$.

Единичная функция, смещенная вправо на a единиц (рис. 31, б), представляется выражением:

$$1_{-1}(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > a. \end{cases} \quad (66)$$

Интегрируя единичную функцию, получим единичную линейную возрастающую функцию (рис. 32, а):

$$1_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t 1_{-1}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (67)$$

Далее интегрируя $1_{-2}(t)$, получим единичную квадратичную функцию (рис. 32, б):

$$1_{-3}(t) = \int_{-\infty}^t 1_{-2}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t^2/2 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (68)$$

При дифференцировании единичной функции образуется импульсная единичная функция или дельта-функция (функция Дирака).

Импульсной единичной функцией $1_0(t)$ называется такая функция действительного переменного, которая повсюду тождественно равна нулю при всех значениях времени, за исключением нулевой точки, где она равна бесконечности:

$$\delta(t) = 1_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (69)$$

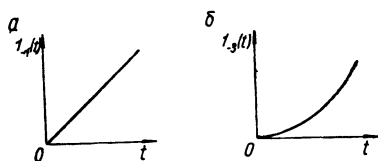


Рис. 32. Единичные линейная и квадратичная функции.

При этом интеграл от импульсной единичной функции определяется таким образом, что удовлетворяется равенство

$$\int_{-\infty}^t 1_0(t) dt = 1_{-1}(t). \quad (70)$$

Графически импульсная единичная функция обозначается в виде направленного отрезка (рис. 33). Импульсная единичная функция часто обозначается $\delta(t)$.

Единичные ступенчатая и импульсная функции, а также все функции, полученные последовательным дифференцированием или интегрированием этих функций, называются специальными функциями.

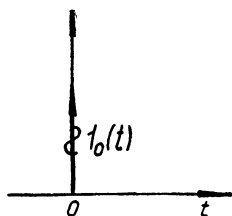


Рис. 33. Единичная импульсная функция.

Специальные функции не относятся к классу обыкновенных функций. Они относятся к классу обобщенных функций, математическое обоснование которых может быть проведено путем привлечения современного математического аппарата.

Пример 9. Дана цепь (рис. 34, а). На входе цепи действует напряжение в виде ступенчатой функции (рис. 34, б). Записать в аналитической форме воздействие, используя единичные ступенчатые функции. Записать дифференциальные уравнения системы и определить, является ли система линейной.

Решение. Представим воздействие как сумму следующих ступенчатых функций (рис. 35):

$$u = u_1 + u_2 + u_3.$$

Используя понятие об единичных ступенчатых функциях, выражение для u можно записать так:

$$u = 2 \cdot 1_{-1}(t) + 2 \cdot 1_{-1}(t) (t - t_1) - 4 \cdot 1_{-1}(t - t_2).$$

Аналитически ступенчатую функцию можно записать и так:

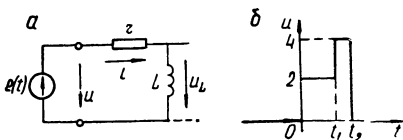


Рис. 34. Цепь r, L (а); форма напряжения на входе цепи (б).

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 2 & \text{при } 0 < t < t_1; \\ 4 & \text{при } t_1 < t < t_2; \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Однако такая запись менее удобна. (Она записана большим числом символов.) Ее значения в точках разрыва не определены. Оставаясь в классе обыкновенных функций, мы не можем определить и произ-

водные в точках разрыва. Используя первую запись, мы получим выражение для производной (рис. 36):

$$u' = 2 \cdot 1_0(t) + 2 \cdot 1_0(t - t_1) - 4 \cdot 1_0(t - t_2).$$

Из данного примера видно, что ступенчатое воздействие можно представить в виде суммы единичных ступенчатых функций, каждую со своим весом.

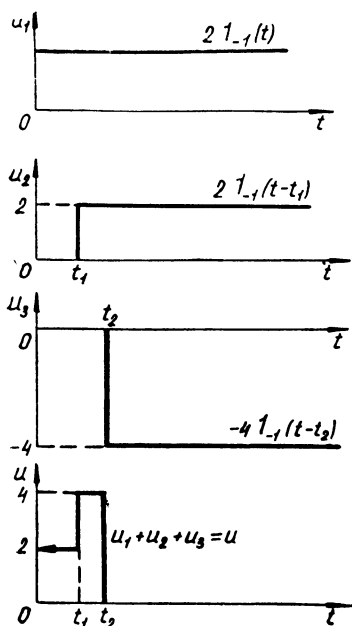


Рис. 35. Ступенчатая функция как суперпозиция единичных смещенных функций включения.

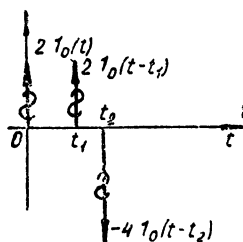


Рис. 36. Графическое изображение производной от ступенчатой функции.

Проверим, является ли данная система линейной. За отклик системы примем ток в цепи. Тогда относительно отклика дифференциальное уравнение определится выражением

$$L \frac{di}{dt} + ri = u,$$

которое является линейным с постоянными коэффициентами, поэтому система линейна и стационарна.

§ 11. Понятие об анализе и синтезе цепей

Все возникающие на практике задачи по расчету цепей и электромагнитных систем можно разделить на задачи анализа и синтеза.

Задача анализа цепи — нахождение отклика по воздействию и за-

данной цепи (системы). Задача синтеза цепи — определение структуры электрических цепей (систем) и значений параметров, входящих в эти системы, по заданным воздействию и реакции (отклику) цепи. Задача синтеза — это задача нахождения системы, обладающей заданными свойствами. При синтезе возникает проблема эквивалентных преобразований полученных цепей, в результате которых характеристики цепи не изменяются, но меняется структура цепи и состав ее элементов. Синтез включает в себя также и проблему наиболее подходящего математического описания заданных свойств системы. Анализ и синтез разделяются по исходным данным и по конечной цели.

В курсе «Основы теории цепей» преимущественно рассматриваются задачи анализа электрических цепей. Для решения этой задачи необходимо уметь рассчитывать токи и напряжения в любых участках системы по заданным воздействиям в системе. Задать систему или цепь — это значит задать элементы этой системы и их параметры, структуру системы или иначе способ связи этих элементов и начальные условия.

Глава II

ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИХ. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД. МЕТОД КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЫ

§ 12. Основные определения

Рассмотрим цепь при гармоническом или синусоидальном воздействии в установившемся режиме. Синусоидальное воздействие относится к воздействиям в классе периодических функций.

Функция времени $f(t)$ называется **периодической**, если ее значения повторяются через равные промежутки времени. Периодическую функцию можно записать так:

$$f(t) = f(t+T) \quad \forall t, \quad (71)$$

где T — вещественное число, называемое **периодом**.

Областью существования периодической функции является вся ось действительных чисел. На рис. 37 приведены примеры периоди-

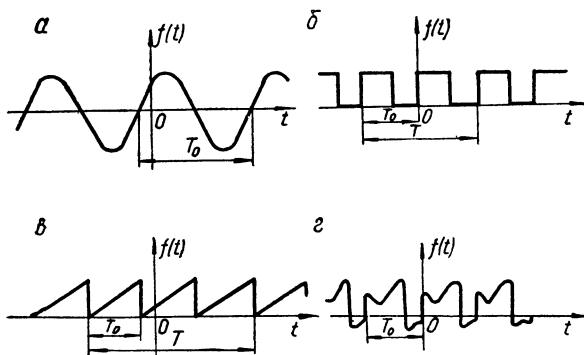


Рис. 37. Примеры периодических функций (для $\forall t$).

ческих функций. На этом рисунке показан период T функции $f(t)$. Число 0 всегда является периодом, число, противоположное периоду функции, и сумма периодов функции снова являются периодами $f(t)$. Функция, не имеющая периодов $T \neq 0$, называется **апериодической**. Функция, имеющая периодом любое вещественное число T , равна постоянной.

Наименьший период периодической функции называется **основным периодом** T_0 . Очевидно, $T = nT_0$, где n — целое число положительное,

отрицательное или равное нулю. В дальнейшем главный период T_0 будем обозначать через T : Периодические функции есть абстракция. Это функция с бесконечно большой энергией.

Наиболее простой периодической функцией является синусоидальная функция (рис. 37, а). Математически синусоидальную функцию для тока и напряжения можно записать в виде

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) \quad \forall t, \quad (72a)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad \forall t. \quad (72б)$$

Каждая синусоидальная функция определяется тремя параметрами: амплитудой U_m или I_m (для напряжения и тока), угловой частотой ω и начальной фазой ψ или α .

Амплитудой синусоидальной функции U_m называется ее наибольшее значение. Амплитуда всегда положительная величина.

Угловой частотой называется величина, связанная с периодом T выражением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ рад/сек.} \quad (73)$$

Число полных колебаний в одну секунду называется частотой f . Частота измеряется в герцах. Между частотой f , угловой частотой ω и периодом T существуют следующие зависимости:

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (74)$$

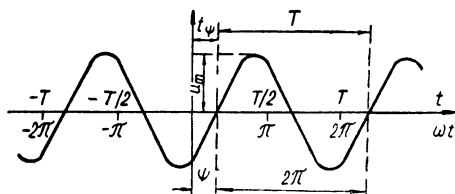


Рис. 38. Синусоидальная функция

напряжений и тока соответственно равна:

$$\theta_u(t) = \omega t + \psi; \quad (75a)$$

$$\theta_i(t) = \omega t + \alpha. \quad (75б)$$

Значение фазы в нулевой момент времени называется **начальной фазой**. Начальные фазы напряжения и тока будем обозначать ψ и α . Начальная фаза колебания связывает время процесса с временем наблюдения или иначе с началом отсчета. На рис. 38 изображена синусоидальная функция и указаны ее основные параметры. По оси абсцисс можно откладывать либо время t , либо безразмерную величину $\omega t = \frac{2\pi}{T} t$, измеряемую в радианах. В первом случае период и начальная фаза определяются промежутками времени T и t_ψ , во втором — эти величины измеряются в радианах 2π и ψ . Начальная фаза определяется на графике отрезком, заключенным между началом координат и ближайшей точкой на оси абсцисс, в которой синусоида

принимает нулевое значение, переходя от отрицательных значений к положительным. Начальная фаза измеряется в направлении к началу координат. Начальная фаза положительна, если направление стрелки совпадает с положительным направлением отсчета времени, и отрицательна, если стрелка отрезка величины фазы противоположна оси времени. (На рис. 38 начальная фаза — величина отрицательная.) На рис. 39, а изображена синусоида с начальной положительной фазой, а на рис. 39, б — с отрицательной фазой. Так как синусоида от косинусоиды отличается только начальной фазой, то в дальнейшем под синусоидой будем понимать любую кривую, определяемую уравнением (72).

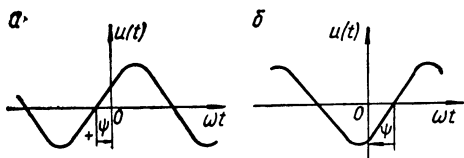


Рис. 39. Синусоиды с положительной (а) и отрицательной (б) начальными фазами.

Одно колебание опережает другое во времени, если начальная фаза первого колебания больше начальной фазы второго колебания. Колебания одной и той же частоты называются **синхронными**. Если у таких колебаний совпадают начальные фазы, то они называются **синфазными**. Если начальные фазы отличаются на $\pi/2$, то о таких колебаниях говорят, что они находятся в квадратуре; если начальные фазы отличаются на π , то колебания находятся в противофазе. Синхронные колебания называются также **когерентными колебаниями**.

Фазовые соотношения между гармоническими колебаниями* удобнее всего характеризовать разностью фаз **сравниваемых колебаний**. Если

Колебания одной и той же частоты называются **синхронными**. Если у таких колебаний совпадают начальные фазы, то они называются **синфазными**. Если начальные фазы отличаются на $\pi/2$, то о таких колебаниях говорят, что они находятся в квадратуре; если начальные фазы отличаются на π , то колебания находятся в противофазе. Синхронные колебания называются также **когерентными колебаниями**.

Фазовые соотношения между гармоническими колебаниями* удобнее всего характеризовать разностью фаз **сравниваемых колебаний**. Если

$$u_1 = U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } u_2 = U_{m2} \sin(\omega t + \psi_2),$$

то разностью или сдвигом фаз колебаний называют безразмерную величину

$$\varphi = \psi_1 - \psi_2, \quad (76)$$

которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Разность двух колебаний одной и той же частоты не зависит от начала отсчета времени. Для гармонических колебаний с различными частотами под разностью фаз понимают величину

$$\varphi = (\omega_1 t + \psi_1) - (\omega_2 t + \psi_2) = (\omega_1 - \omega_2) t + \psi_1 - \psi_2. \quad (77)$$

В этом случае разность фаз двух колебаний зависит от времени.

§ 13. Электрическая цепь при гармоническом воздействии

Гармоническое воздействие является одним из простейших незатухающих воздействий. Оно широко используется как испытательное типовое воздействие при отладке, настройке и определении харак-

теристик аппаратуры. Изучение гармонического воздействия имеет также большое значение при анализе системы, потому что знание отклика на гармоническое воздействие позволяет получить многие свойства реакции этой системы на другие виды воздействий. В энергетике переменный ток и напряжение промышленной частоты (50 гц) очень близки к гармоническому току и напряжению. Гармоническое воздействие так же, как и любое детерминированное колебание, информации не несет.

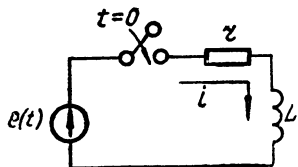


Рис. 40. Цепь r, L при гармоническом воздействии.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из элементов r, L (рис. 40) и находящуюся под гармоническим воздействием:

$$e(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \text{ при } t > 0.$$

Дифференциальное уравнение для этой цепи можно записать так:

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi) \text{ при } t > 0. \quad (78)$$

Оно отличается от дифференциального уравнения цепи, находящейся под ступенчатым воздействием, лишь свободным членом. Очевидно, дифференциальные уравнения для одних и тех же цепей, находящихся при различных воздействиях, будут отличаться друг от друга только свободным членом, который и определяет тип воздействия. Соответствующие однородные дифференциальные уравнения не будут отличаться от дифференциальных уравнений, которые описывают свободные колебания в той же цепи.

Известно, что частные решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений со свободными членами в виде синусоидальных функций выражаются в тех же функциях. Отсюда общее решение неоднородного уравнения типа (78) определится выражением:

$$i = i_{\text{св}} + i_{\text{пр}} = Ae^{-\frac{r}{L}t} + I_m \sin(\omega t + \alpha) \text{ при } t > 0. \quad (79)$$

Здесь синусоидальная функция представляет частное решение неоднородного уравнения и характеризует вынужденные колебания в цепи. Постоянная A в общем решении определяется начальными условиями задачи. Следовательно, первое слагаемое (79) характеризует свободное колебание в цепи. Это колебание независимо от начальных условий убывает во времени. Поэтому практически по истечении времени $3 \div 4\tau$ ($\tau = \frac{L}{r}$), после приложения к цепи воздействия, свободные колебания в цепи затухают. Строго говоря, цепь, находящаяся под гармоническим воздействием, с момента $t > 0$ через бесконечно большое время переходит в состояние гармонических колебаний. В этой главе мы не будем учитывать переходный режим в

цепи, имеющий место непосредственно после приложения воздействия. Мы будем изучать цепи при гармоническом воздействии в установившемся режиме. Анализ и расчет таких цепей будет сводиться к определению амплитуд и начальных фаз токов во всех ветвях и напряжений во всех точках цепи относительно других точек.

§ 14. Среднее и действующее значения функции.

Средние и действующие значения э. д. с. напряжений и токов

Среднее значение по времени любой функции определяется по формуле

$$F_{\text{ср}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt. \quad (80)$$

Для периодических сигналов среднее значение за все время равно среднему за один период T :

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \quad (81)$$

независимо от положения интервала на оси времени, равного периоду. Так как значение интеграла в выражении (81) не зависит от t_1 , то можно записать:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

В случае синусоидальной функции среднее значение за период равно нулю, так как площадь положительной полуволны компенсируется площадью отрицательной полуволны синусоиды. Поэтому вводят понятие о среднем значении периодической функции за положительный полупериод. Для напряжения эта величина определится выражением

$$U_{\text{ср}} = \frac{2U_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m.$$

Аналогично запишем среднее значение синусоидального тока:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m.$$

Такое определение средних значений используют и для периодических несинусоидальных э. д. с., напряжений и токов, когда положительные и отрицательные их полуволны одинаковы по площади.

Измерительные приборы магнитоэлектрической системы с выпрямителем реагируют на среднее по модулю значение величины.

О величине периодических функций обычно судят по так называемому действующему (среднеквадратичному) значению за период.

Действующее значение периодической функции $f(t)$ вычисляется по формуле

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}. \quad (82)$$

В соответствии с этим определением для э. д. с., напряжения и тока будем иметь:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (83)$$

Если выражение для действующего значения тока возвести в квадрат и обе части умножить на rT , получим

$$rI^2 T = \int_0^T ri^2 dt.$$

Это равенство показывает, что действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление r , за период времени T выделяет то же количество тепла, что и данный ток.

Определим связь действующего значения I синусоидального тока $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ с его амплитудой I_m :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \alpha) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично для синусоидальных э. д. с. и напряжения получим

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими значениями. Приборы тепловой, электромагнитной и электродинамической систем измеряют действующие значения.

§ 15. Математические методы расчета установившихся режимов в линейных электрических цепях при гармоническом воздействии

Наиболее полно задача по определению отклика в цепи по заданному воздействию сводится к решению дифференциального уравнения, составленного относительно отклика. Когда воздействие является синусоидальным, то определение токов и напряжений в таких цепях в установившемся режиме связано с нахождением частных решений неоднородных дифференциальных уравнений, записанных на основе

законов Кирхгофа. Можно показать, что при синусоидальном воздействии частное решение неоднородного дифференциального уравнения существует в классе синусоидальных функций. Поэтому наша задача сводится только к определению неизвестных параметров синусоидальной функции. К этим параметрам относятся только амплитуды и начальные фазы, так как частоты заданы внешним воздействием.

Для нахождения амплитуд и начальных фаз синусоидально изменяющихся токов, напряжений и потенциалов в цепи в установившемся режиме существуют различные математические методы.

Под **математическими методами** будем понимать методы нахождения амплитуд и начальных фаз синусоидальных откликов. Наибольшее распространение получили три метода нахождения амплитуд и начальных фаз: алгебраический, геометрический, комплексный.

Рассмотрим кратко первые два метода. Метод нахождения амплитуд и начальных фаз с помощью алгебры тригонометрических функций называется **алгебраическим методом**.

Сущность алгебраического метода рассмотрим на примере цепи с последовательно соединенными элементами r , L , C (рис. 41). Такая цепь называется последовательным колебательным контуром. Здесь воздействием является э. д. с. $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Откликом является ток в цепи i . Относительно тока на основе второго закона Кирхгофа можно составить следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^+ i dt + u_c(0_-) = e(t) \text{ при } t > 0. \quad (84)$$

Так как воздействие e в данном случае является дифференцируемой функцией, то, продифференцировав уравнение по t , получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E_m \omega \cos(\omega t + \psi). \quad (85)$$

Полное решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Определим только ток установившегося режима, т. е. находим частное решение неоднородного уравнения:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

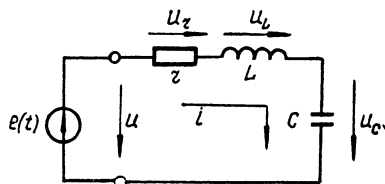


Рис. 41 Последовательный контур при гармоническом воздействии.

Определим величины I_m и α при заданных E_m , ω , ψ . Подставляя значение тока i в выражение (85), получаем

$$\begin{aligned} -L\omega^2 I_m \sin(\omega t + \alpha) + r\omega I_m \cos(\omega t + \alpha) + \frac{I_m \sin(\omega t + \alpha)}{C} = \\ = U_m \omega \cos(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Это уравнение справедливо для любого момента времени t . Полагая $\omega t = \pi/2$ и $\omega t = 0$, находим:

$$\begin{aligned} -L\omega^2 I_m \cos \alpha - r\omega I_m \sin \alpha + \frac{I_m \cos \alpha}{C} = -U_m \omega \sin \psi; \\ -L\omega^2 I_m \sin \alpha + r\omega I_m \cos \alpha + \frac{I_m \sin \alpha}{C} = U_m \omega \cos \psi. \end{aligned}$$

Разделим оба выражения на ω и вынесем I_m за знак скобки:

$$\begin{aligned} I_m \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \alpha + r \sin \alpha \right] &= U_m \sin \psi; \\ I_m \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \alpha - r \cos \alpha \right] &= -U_m \cos \psi. \end{aligned} \quad (86)$$

После возведения первого и второго равенств в квадрат и последующего сложения имеем

$$\left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] I_m^2 = U_m^2.$$

Находим связь между амплитудами тока и напряжения:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (87a)$$

Поделив обе части этого равенства на $\sqrt{2}$, получим зависимость для действующих значений:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (87b)$$

Преобразуем первое выражение (86) следующим образом. Введем обозначения:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = z \sin \varphi; \quad (88)$$

$$r = z \cos \varphi.$$

Первое выражение (86) запишем так:

$$I_m z (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = U_m \sin \psi$$

или, заменяя выражение в скобках через $\sin(\varphi + \alpha)$, получим

$$I_m z \sin(\varphi + \alpha) = U_m \sin \psi,$$

следовательно,

$$\varphi + \alpha = \psi, \text{ или } \varphi = \psi - \alpha. \quad (89)$$

Из зависимости (88) легко определить z , если возвести обе части в квадрат и сложить оба равенства:

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (90)$$

Если сравнить выражения (87) и (90), то легко установить равенство:

$$z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Величина z имеет размерность сопротивления. Ее называют полным сопротивлением последовательного контура. Из уравнения (88) находим выражение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}. \quad (91)$$

Угол φ определяет сдвиг фаз тока относительно напряжения в контуре. Он определяется из равенства (91):

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}. \quad (92)$$

Определив z и φ , находим I_m и α . Для мгновенного значения тока запишем уравнение

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left(\omega t + \psi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right).$$

Рассмотрим полное сопротивление контура. Сопротивление r называется **активным сопротивлением** цепи. Величину $\omega L - \frac{1}{\omega C}$, учитывающую реакцию самоиндукции и емкости и имеющую размерность сопротивления, называют **реактивным сопротивлением** цепи и обозначают x . При этом член ωL , учитывающий реакцию самоиндукции, называют **индуктивным сопротивлением** цепи и обозна-

чают x_L , а член $\frac{1}{\omega C}$, учитывающий реакцию емкости, называют **емкостным сопротивлением цепи** и обозначают x_C . Итак,

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}, \quad x = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

С увеличением частоты x_L растет линейно. Это объясняется тем, что э. д. с. самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока и поэтому ее амплитуда растет с увеличением частоты при неизмен-

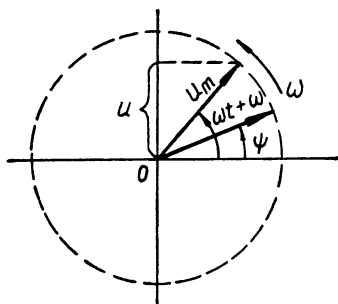


Рис. 42. Изображение синусоидального напряжения с помощью вращающегося вектора.

ной амплитуде тока. Так как ток смещения в емкости пропорционален скорости изменения напряжения на ее зажимах, то амплитуда тока растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде напряжения. Поэтому с увеличением частоты x_C уменьшается.

Из рассмотренного нами примера видно, что амплитуда и начальная фаза при алгебраическом методе находятся путем суммирования синусоидальных напряжений или токов с неизвестными амплитудами и начальными фазами, а также их производных, входящих в уравнения. Разложив синусоидальные функции на синусные и косинусные

составляющие с одинаковыми переменными аргументами, можно привести задачу к виду, удобному для решения. Однако эта операция практически применима только для простейших цепей, не содержащих большое число контуров и источников. Для сложных цепей этот метод требует громоздких и трудоемких вычислений.

Метод нахождения амплитуд и начальных фаз с помощью геометрических операций над векторами, изображающих синусоидальные функции, называется **геометрическим методом**.

Физические величины, изменяющиеся по синусоидальному закону с частотой ω , можно изобразить векторами, вращающимися с угловой скоростью, равной ω . При этом длина вектора в соответствующем масштабе равна амплитуде синусоидальной величины. На рис. 42 изображено с помощью вращающегося вектора синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \text{ вт.}$$

При отсчете угла $(\omega t + \psi)$ от горизонтальной оси проекция вращающегося вектора на вертикальную ось равна в избранном масштабе мгновенному значению напряжения.

При нахождении амплитуд и начальных фаз в установившемся режиме пользуются векторными диаграммами, если задача по нахож-

дению отклика решается геометрическим методом. **Векторной диаграммой** называется совокупность векторов, построенных с соблюдением правильной ориентировки и отражающих установившиеся процессы в цепи при гармоническом воздействии.

Рассмотрим геометрический метод нахождения амплитуд, начальных фаз и одновременно порядок построения векторной диаграммы.

Векторную диаграмму будем строить для действующих значений напряжения и тока. При рассмотрении установившихся синусоидальных процессов начальную фазу одной из величин можно выбрать произвольно. Так как в последовательном контуре ток через все элементы протекает один и тот же, то в качестве исходного вектора возьмем искомый вектор тока и отложим его по горизонтальной оси (рис. 43), начальная фаза тока α равна нулю. Напряжение на сопротивлении r

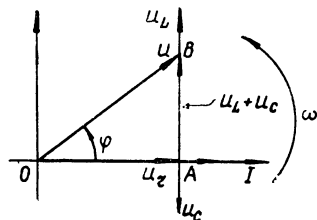


Рис. 43. Векторная диаграмма для последовательного контура.

$$u_r = ri = rI_m \sin \omega t \text{ вт.}$$

Отсюда напряжение u_r совпадает по фазе с током и поэтому вектор этого напряжения направлен вдоль вектора тока. Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos \omega t = \omega LI_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$, и вектор этого напряжения u_L должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении и иметь длину ωLI .

Напряжение на емкости C определится уравнением

$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0_-) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t + \frac{I_m}{\omega C} + u_c(0_-).$$

Выберем $u_c(0_-)$ так, чтобы $\frac{I_m}{\omega C} = -u_c(0_-)$, тогда

$$u_c = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Из этого выражения следует, что напряжение на емкости отстает от тока на угол $\frac{\pi}{2}$. Поэтому вектор этого напряжения u_c нужно повернуть относительно вектора тока на угол $\frac{\pi}{2}$ в отрицательном

направлении. Складывая геометрически векторы напряжений на элементах цепи U_r , U_C и U_L , получаем вектор напряжения U на зажимах всей цепи, который сдвинут по отношению к вектору тока I на угол φ . Теперь задача состоит в том, чтобы определить ток I и угол сдвига фаз φ . Ток I определим из треугольника напряжений OAB :

$$U^2 = U_r^2 + (U_L + U_C)^2,$$

или

$$U^2 = r^2 I^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 I^2,$$

откуда

$$U = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} I,$$

так как

$$\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = z,$$

то

$$U = zI.$$

Из треугольника следует, что сдвиг фаз тока относительно напряжения φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r},$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

В заключение сделаем выводы о наиболее общих свойствах установившихся процессов в цепи при синусоидальном воздействии.

1. В установившемся режиме реакцию элементов L и C на изменяющиеся по синусоидальному закону ток и напряжение лучше всего характеризовать величинами реактивных сопротивлений $x_L = \omega L$ и $x_C = \frac{1}{\omega C}$, а реакцию всей цепи полным сопротивлением цепи z .

Введение величин x_L , x_C и z не имеет никакого физического смысла, если воздействие несинусоидальное, а процесс неустановившийся.

2. Для амплитудных и действующих значений применим закон Ома как для элементов L и C , так и для всей цепи:

$$I = \frac{U_L}{\omega L}; \quad I = \frac{U_C}{\frac{1}{\omega C}}; \quad I = \frac{U}{z}.$$

3. Понятие о сдвиге фаз между физическими величинами вводится только для синусоидальных воздействий при установившемся режиме. При этом на активном сопротивлении ток совпадает по фазе с напряжением на этом элементе. На индуктивности ток отстает по

фазе на угол $\frac{\pi}{2}$ от напряжения, приложенного к этому элементу; на емкости ток опережает по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$ напряжение, приложенное к этому элементу. На входе общей цепи сдвиг фазы φ между током и напряжением на зажимах всей цепи лежит в пределах $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и определяется выражением (92).

4. Геометрический метод нахождения амплитуд и начальных фаз является наглядным, но он не обладает должной точностью. Поэтому его чаще всего используют совместно с алгебраическим методом для качественной оценки установившихся процессов в цепи, находящейся при синусоидальном воздействии.

§ 16. Комплексный метод

Комплексный метод есть метод нахождения амплитуд и начальных фаз токов, напряжений и потенциалов в цепи при гармоническом воздействии. Этот метод позволяет алгебре тригонометрических функций заменить алгеброй комплексных чисел. Упрощение при применении этого метода достигается применением комплексных чисел \dot{A} для изображения синусоидальных функций времени (рис. 44). Комплексный метод применим при выполнении двух условий: 1 — воздействие должно быть гармоническим и установившимся; 2 — процессы в цепях должны описываться линейными соотношениями.

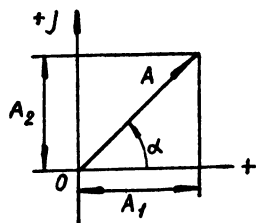


Рис. 44. Комплексная плоскость с изображением комплексного числа.

Метод, основанный на символическом изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами, называется **комплексным методом**. Так как при этом методе действительные синусоидальные функции символически изображаются комплексными числами, то его называют **символическим**, а также методом комплексных амплитуд. Система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел. В записи комплексного числа $\dot{A} = A_1 + jA_2$ число A_1 называется действительной частью \dot{A} и обозначается $Re\dot{A}$; число A_2 называется мнимой частью \dot{A} и обозначается $Im\dot{A}$, комплексное число j называется мнимой единицей. Каждому комплексному числу можно поставить в соответствие точку на комплексной плоскости. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называется **комплексной плоскостью**. Ось абсцис этой плоскости называется действительной осью, так как

ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется мнимой осью.

Комплексное число, соответствующее точке, в которой лежит конец вектора \dot{A} , может быть написано в формах: алгебраической

$$\dot{A} = A_1 + jA_2;$$

тригонометрической

$$\dot{A} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha);$$

показательной

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A \exp j\alpha;$$

полярной (угловой)

$$\dot{A} = A \angle \alpha,$$

где A — действительное неотрицательное число, которое называется модулем или абсолютной величиной числа \dot{A} :

$$A = \text{mod } \dot{A},$$

или

$$A = |\dot{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Угол α называется аргументом числа \dot{A} и обозначается $\arg \dot{A}$. Угол α может принимать любые действительные значения. Аргумент комплексного числа \dot{A} имеет бесконечно много значений. Аргумент комплексного числа является естественным обобщением знака действительного числа. Аргумент положительного числа равен нулю: $A = Ae^{j0}$, аргумент отрицательного действительного числа A равен π , так как $-A = Ae^{j\pi}$. На действительной оси из начала координат выходят лишь два направления «+» и «—», тогда как на комплексной плоскости направлений, выходящих из точки 0, бесконечно много.

Напомним следующие свойства комплексных чисел: комплексные числа (а не их модули) никогда нельзя соединять знаком неравенства; два комплексных числа равны друг другу, если порознь равны их действительные и мнимые числа. Два комплексных числа, имеющие равные модули, но противоположные по знаку аргументы, называются сопряженными. Если имеем комплексное число

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A_1 + jA_2,$$

то сопряженное ему число запишется так:

$$\dot{A}^* = Ae^{-j\alpha} = A_1 - jA_2.$$

Для сопряженных чисел справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\dot{A}\dot{A}^* - A e^{j\alpha} A e^{-j\alpha} &= A^2; \\ \operatorname{Re} \dot{A} &= \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{A}^*); \quad \operatorname{Im} \dot{A} = \frac{1}{2j}(\dot{A} - \dot{A}^*),\end{aligned}$$

где $e^{j\alpha}$ — оператор поворота на угол α ;

$j = e^{j \frac{\pi}{2}}$ — оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2}$.

Умножение на j сводится к повороту вектора против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$, а умножение на $-j = e^{-j \frac{\pi}{2}}$ — к повороту вектора на прямой угол по часовой стрелке. Умножение комплексного числа \dot{A} на число $e^{j\alpha}$ сводится к повороту вектора \dot{A} в комплексной плоскости на угол α :

$$\dot{A} e^{j\alpha} = A e^{j\varphi} e^{j\alpha} = A e^{j(\varphi + \alpha)}.$$

Справедлива следующая формула Эйлера:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha.$$

Пусть имеется синусоидально изменяющийся ток $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$, тогда

$$i = \operatorname{Im} \{ I_m e^{j(\omega t + \alpha)} \}.$$

Комплексную функцию, называемую комплексом тока

$$i_k = I_m e^{j(\omega t + \alpha)} = I_m e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}, \quad (93)$$

будем рассматривать как символическое изображение действительного синусоидального тока $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$; она несет такое же количество информации, как и действительный ток. Так, например, если

$$i = 12 \sin \cdot (10^5 t + 30^\circ) \text{ а,}$$

то комплекс тока определится выражением

$$i_k = 12 e^{j30^\circ} e^{j10^5 t} \text{ а.}$$

Между синусоидальной функцией и ее символическим обозначением существует однозначное соответствие. Если ввести знак соответствия \doteq , то можно записать

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) \doteq I_m e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

где $e^{j\omega t}$ — оператор вращения.

Комплексное число $I_m e^{j\alpha}$, модуль которого равен амплитуде тока, а аргумент — начальной фазе, называется **комплексной амплитудой тока** и определяется выражением:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha}.$$

Комплексным действующим значением тока называется комплексное число

$$\dot{I} = I e^{j\alpha},$$

здесь

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Комплекс \dot{I}_k называется **фазором тока**. В общем случае под фазором какой-либо физической величины, изменяющейся во времени, понимают комплексную функцию $A e^{j(\omega t + \alpha)}$, аргумент которой $\omega t + \alpha$ является линейной функцией времени. Он изображается псевдовектором.

Переход от фазоров тока, напряжения, э. д. с., изображающих действительные функции, к самой действительной функции (оригиналу) совершается просто: необходимо взять коэффициент при j , т. е. мнимую часть фазора. Например, пусть задан фазор напряжения $u_k = 120 \exp\left(10^3 t + \frac{\pi}{9}\right)$ в, требуется перейти к действительной функции времени, которая является напряжением. Для нахождения этой функции берем мнимую часть фазора

$$u = 120 \sin(10^3 t + 20^\circ) \text{ в.}$$

Операция преобразования действительной синусоидальной функции времени в фазор является линейной операцией. Действительно, эту операцию можно представить в виде следующего преобразования:

$$u_k = \left[\frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T u(t) e^{-j\omega t} dt \right] \cdot e^{j\omega t}. \quad (94)$$

В справедливости уравнения (94) можно убедиться путем вычисления этого интеграла, если за $u(t)$ принять синусоидальную функцию времени:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

тогда выражение, стоящее в квадратных скобках, будет равно

$$\frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt = \frac{j \cdot 2 U_m}{T} \int_0^T \frac{e^{j(\omega t + \psi)} - e^{-j(\omega t + \psi)}}{2j} \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

или

$$\frac{U_m}{T} \left[e^{j\psi} \int_0^T dt - e^{-j\psi} \int_0^T e^{-j2\omega t} dt \right] = \frac{U_m}{T} (e^{j\psi} \cdot T - e^{-j\psi} \cdot 0) = U_m e^{j\psi}.$$

Таким образом, комплексная амплитуда $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$ есть результат интегрального преобразования синусоидальной функции времени

$$\dot{U}_m = \frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt. \quad (95)$$

Если теперь в соответствии с выражением (94) полученное выражение для комплексной амплитуды умножить на оператор вращения $e^{j\omega t}$, то получим фазор напряжения $u_k = \dot{U}_m e^{j\omega t}$. Как операция интегрального преобразования (95), так и операция умножения комплексной амплитуды на $e^{j\omega t}$ являются линейными операциями.

Фазор какой-либо физической величины получается в результате интегрального преобразования этой действительной функции времени (в соответствии с уравнением (95) и умножения полученного выражения на оператор вращения. Обозначим оператор преобразования синусоидальной функции времени в фазор через

$$H = \frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T [(\cdot) e^{j\omega t} dt] e^{j\omega t}. \quad (96)$$

Он обладает свойством однородности (гомогенности) и аддитивности, т. е. является линейным оператором.

Оператор H называется линейным, если его область определения есть линейное многообразие (множество) и справедливо равенство

$$H(au_1 + bu_2) = aHu_1 + bHu_2 \quad (97)$$

для любых u_1 и u_2 , принадлежащих линейному множеству, и любых комплексных a и b .

В нашем случае к линейному многообразию относится все множество синусоидальных функций времени одной и той же частоты, но с разными амплитудами и фазами. Такое множество является замкнутым. Это значит, что сумма любого конечного числа синусоидальных функций одной и той же частоты, но с разными амплитудами и начальными фазами, будет также являться синусоидальной функцией той же самой частоты.

Поясним свойство однородности и аддитивности введенного оператора H . Пусть мы имеем две действительные синусоидальные функции времени:

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$$

и

$$u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$$

Если к этим функциям применить оператор H , то мы получим два фазора $u_{1к} = \dot{U}_{1м} e^{j\omega t}$ и $u_{2к} = \dot{U}_{2м} e^{j\omega t}$. Математически эту функцию преобразования можно записать так:

$$H[u_1] = \left[\frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T U_{1м} \sin(\omega t + \psi_1) e^{-j\omega t} dt \right] = \dot{U}_{1м} e^{j\omega t};$$

$$H[u_2] = \left[\frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T U_{2м} \sin(\omega t + \psi_2) e^{-j\omega t} dt \right] = \dot{U}_{2м} e^{j\omega t}.$$

Оператор обладает свойством однородности, если постоянный множитель обладает перестановочным (коммутативным) свойством относительно знака оператора:

$$H[au_1] = aH[u_1]$$

для любого комплексного числа a .

Это свойство однородности проверяется легко. Достаточно в уравнение (94) вместо u_1 поставить $a \cdot u_1$. Тогда постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$H[au_1] = a \left[\left(\frac{j \cdot 2}{T} \int_0^T u_1(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \right] = aH[u_1].$$

Свойства аддитивности оператора математически определяются выражением:

$$H[u_1 + u_2] = H[u_1] + H[u_2].$$

Сформулировать это свойство можно следующим образом. Операция определения фазора от суммы синусоидальных функций равна сумме фазоров от каждой из синусоидальных функций. Это свойство также проверяется путем подстановки суммы $u_1 + u_2$ в выражение (94).

Введение оператора H для получения фазора позволяет строго математически определить ряд свойств преобразования. Однако нет необходимости каждый раз находить фазор, используя выражение (94).

Рассмотрим некоторые свойства фазоров.

Свойство аддитивности. Фазор суммы синусоидальных функций одной и той же частоты равен сумме фазоров каждой функции в отдельности:

$$H \left[\sum_{k=1}^n U_{mk} \sin(\omega t + \psi) \right] = \sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk} e^{j\omega t}.$$

Свойство однородности. Операция умножения синусоидальной функции на постоянный множитель соответствует операции умножения фазора функции на тот же множитель:

$$H[aU_m \sin(\omega t + \psi)] = aH[U_m \sin(\omega t + \psi)] = a\dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Дифференцирование оригинала. Операции дифференцирования синусоидальной функции соответствует операция умножения фазора на множитель $j\omega$:

$$H\left[\frac{d}{dt}U_m \sin(\omega t + \psi)\right] = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Это равенство можно доказать, используя выражение (94). Однако его легче получить, если просто рассмотреть операцию дифференцирования оригинала:

$$\frac{d}{dt}[U_m \sin(\omega t + \psi)] = U_m \omega \cos(\omega t + \psi) = U_m \omega \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Фазор или символическое изображение найденной синусоидальной функции будет таким:

$$\omega U_m e^{j\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega U_m e^{j(\omega t + \psi)} = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Оно отличается от фазора исходной функции лишь множителем $j\omega$. Соответственно для производной n -го порядка:

$$H\left[\frac{d^n u}{dt^n}\right] = (j\omega)^n \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Интегрирование оригинала. Операция интегрирования синусоидальной функции соответствует операции деления фазора на $j\omega$:

$$H\left[\int_0^t I_m \sin(\omega t + \alpha) dt\right] = \frac{\dot{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega}.$$

Рассмотрим операцию интегрирования синусоидальной функции. Для этого напишем выражение для заряда:

$$q = \int_0^t I_m \sin(\omega t + \alpha) dt + q(0_-) = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + \left[\frac{I_m}{\omega} + q(0_-)\right].$$

Если при $t=0_-$ заряд на емкости выбрать равным $q(0_-) = -\frac{I_m}{\omega}$, то выражение для заряда можно будет записать так:

$$q = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

отсюда фазор заряда определится выражением:

$$q_k = \frac{I_m}{\omega} e^{j\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}.$$

При применении символического или комплексного метода составляют дифференциальное уравнение. Для нахождения амплитуд и фаз отклика комплексным методом поступают следующим образом.

1. Все заданные функции времени заменяют их фазорами, т. е. символическими изображениями. В результате такой замены дифференциальные уравнения относительно функции времени преобразуются в алгебраические уравнения относительно фазоров или комплексных амплитуд.

2. Решают полученные алгебраические уравнения и находят комплексные амплитуды искомых функций.

3. Переходят от комплексных амплитуд к фазорам, а от них путем обратного преобразования к функциям времени.

В качестве примера рассмотрим последовательный контур. Для последовательного контура (см. рис. 42) было составлено интегродифференциальное уравнение (84):

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0+}^t idt + u_c(0_-) = u \text{ для } t > 0.$$

В полученном выражении все функции времени (u и i) заменяем фазорами, используя ранее сформулированные свойства:

$$r\dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Здесь выражение $\frac{1}{C} \int_{0+}^t idt + u_c(0_-)$ заменено фазором $\frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t}$,

так как принято $u_c(0_-) = -\frac{I_m}{\omega C}$.

Сокращая полученное выражение на оператор вращения $e^{j\omega t}$, находим

$$\dot{I}_m \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}_m. \quad (98)$$

Это уравнение составлено относительно комплексных амплитуд. Оно является алгебраическим. Для установившихся процессов при гармоническом воздействии линейное уравнение относительно фазоров можно сократить на оператор вращения. По этим причинам комплексный метод и называется методом комплексных амплитуд. От полученного уравнения для комплексных амплитуд легко перейти к уравнению для комплексных действующих значений, так как $\dot{I}_m = \sqrt{2} I$:

$$I \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = U. \quad (99)$$

Из равенства (98) легко определяется комплексная амплитуда тока:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Из этого уравнения находятся амплитуда и начальная фаза тока, т. е. модуль и аргумент \dot{I}_m :

$$I_m e^{j\alpha} = \frac{U_m e^{j\psi}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{j\varphi};$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Приравнивая модуль и аргументы левой и правой частей, определяем

$$\text{mod } \dot{I}_m = I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\arg \dot{I}_m = \alpha = \psi - \varphi = \psi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r},$$

тогда для оригинала тока получаем

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \alpha) = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \psi - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}\right). \end{aligned}$$

Это выражение для мгновенного значения тока полностью совпадает с ранее полученным значением тока, определенным алгебраическим методом.

Если в качестве воздействия взять косинусоидальную функцию

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi),$$

то в этом случае все методы нахождения частных решений сохраняются, но имеются и некоторые особенности.

1. Символическое изображение или фазор является результатом следующего преобразования:

$$u_k = \left[\frac{2}{T} \int_0^T U_m \cos(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t}.$$

2. Операция нахождения оригинала сводится к взятию действительной части от фазора:

$$u(t) = \text{Re} [\dot{U}_m e^{j\omega t}] = U_m \cos(\omega t + \psi).$$

Операция деления на множестве фазоров не определена. Поэтому при делении на оператор вращения мы переводим одно множество элементов (фазоров) из группы в другое множество элементов (множество комплексных чисел), которое образует поле.

§ 17. Комплексные сопротивления и проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Проанализируем выражение (98), полученное для последовательного контура. Из этого выражения следует:

$$\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}. \quad (100)$$

Отношение комплексных амплитуд или действующих значений напряжения и тока на входе пассивного двухполюсника называется **комплексным сопротивлением цепи**, которое определяется уравнением

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = ze^{j\varphi} = r + jx, \quad (101)$$

где r , x и z — активное, реактивное и полное сопротивления цепи;

$$z = \text{mod. } Z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Здесь z — модуль комплексного сопротивления Z ;

$$\varphi = \arg Z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r},$$

где φ — аргумент комплексного сопротивления.

Комплексное сопротивление называют также **импедансом цепи**. Комплексное сопротивление цепи есть комплексная величина, которая одновременно несет информацию об отношении амплитуд напряжения и тока (модуль) и сдвиге начальных фаз тока относительно напряжения (аргумент). Из выражения (98) следует, что напряжение в комплексной форме имеет вид:

на сопротивлении

$$\dot{U}_{mr} = r\dot{I}_m;$$

на индуктивности

$$\dot{U}_{mL} = j\omega L\dot{I}_m;$$

на емкости

$$\dot{U}_{mC} = \frac{\dot{I}_m}{j\omega C}.$$

Величины $j\omega L$ и $\frac{1}{j\omega C}$ называются **комплексными индуктивными и емкостными сопротивлениями**:

индуктивное

$$Z_L = j\omega L;$$

емкостное

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}.$$

Эти сопротивления одновременно несут информацию о модуле и аргументе; при этом модуль сопротивления показывает отношение амплитуды (действующего значения) напряжения к амплитуде (действующему значению) тока на элементе, а аргумент — сдвиг фаз тока относительно напряжения на этом же элементе.

Фазоры, подобно векторам, можно изобразить на комплексной плоскости в виде направленных отрезков. Сумма фазоров, построенных на комплексной плоскости с соблюдением правильной ориентировки их относительно друг друга и отражающих установившиеся процессы в цепи при гармоническом воздействии, называется **фазорной диаграммой**. На рис. 45 представлена фазорная диаграмма для последовательного контура и момента времени $t=0$. На этой диаграмме фазор тока (отрезок \dot{I}) расположен под углом α к действительной оси. Длина отрезка равна амплитуде или действующему значению тока. В дальнейшем на фазорных диаграммах будем откладывать действующие значения. Напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, так как $\dot{U}_r = r\dot{I}$, где r — действительное число ($r = re^{j0}$). Поэтому \dot{U}_r откладываем в направлении фазора тока. Напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}.$$

Множитель j в правой части показывает, что фазор \dot{U}_L нужно от конца фазора \dot{I} повернуть против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$.

Так как напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$,

а напряжение на емкости отстает от тока на угол $\frac{\pi}{2}$, то эти два напряжения сдвинуты по фазе на угол π . Поэтому фазор напряжения \dot{U}_C откладываем от конца фазора \dot{U}_L в противоположном на-

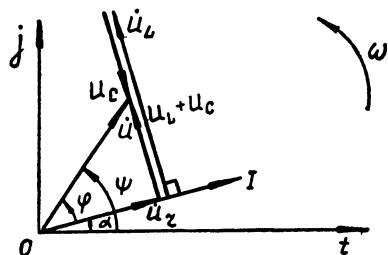


Рис. 45. Фазорная диаграмма последовательного контура.

правлении. Отрезок, соединяющий конец фазора \dot{U}_r с фазором \dot{U}_c , равен сумме $\dot{U}_L + \dot{U}_c$ (см. рис. 45). Фазор, проведенный из начала координат O к концу фазора $\dot{U}_L + \dot{U}_c$, даст фазор напряжения \dot{U} на входе последовательного контура. Фазорная диаграмма вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω .

Из фазорной диаграммы видно, что φ есть угол сдвига фазы тока в цепи относительно напряжения \dot{U} , приложенного к контуру.

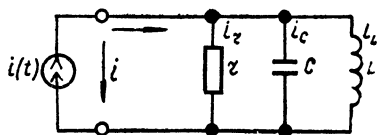


Рис. 46. Параллельный контур.

Этот угол отсчитывается от фазора тока к фазору напряжения. Угол является положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки. От фазорной диаграммы легко перейти к мгновенным значениям токов и напряжений, а также и к временным диаграммам.

Введем понятие о проводимости цепи. Для этого рассмотрим установившийся синусоидальный режим в цепи с параллельным соединением элементов r , L и C (рис. 46). Цепь с параллельным соединением элементов называется **параллельным контуром**. Примем, что на входе контура действует источник тока $i(t)$. Таким образом, ток является воздействием, а напряжение $u(t)$ на входе контура — откликом цепи. Поэтому дифференциальное уравнение будем составлять относительно u . По первому закону Кирхгофа для мгновенных значений тока запишем:

$$i_r + i_c + i_L = i.$$

Теперь выразим ток на каждом элементе через отклик

$$gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i(0_-) = i, \quad (102)$$

где $g = \frac{1}{r}$ — активная проводимость ветви с элементом r .

Пусть к цепи приложен синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Решение найдем комплексным методом. Для этого все мгновенные значения напряжения и тока заменим их фазорами, учитывая правило дифференцирования и интегрирования фазоров.

$$g\dot{U}_m e^{j\omega t} + j\omega C\dot{U}_m e^{j\omega t} + \frac{\dot{U}_m}{j\omega C} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Здесь начальное значение тока $i_L(0_-)$ выбрано таким, что $i_L(0_-) = -\frac{U_m}{\omega L}$. Сокращая полученное выражение на $e^{j\omega t}$, получим

$$\left(g + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) \dot{U}_m = \dot{i}_m.$$

Задача состоит в том, чтобы найти $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$, зная параметры цепи и \dot{i}_m . Обозначим через Y выражение, стоящее в круглых скобках

$$Y = g + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}, \quad (103)$$

тогда

$$Y = \frac{\dot{i}_m}{U_m} = \frac{I}{U}. \quad (104)$$

Эта величина называется **комплексной проводимостью** цепи. Комплексная проводимость цепи есть отношение комплексных амплитуд тока и напряжения на входе пассивной цепи. Ее также называют **адмитансом** цепи. Комплексную проводимость можно записать в следующей форме:

$$Y = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb = ye^{-j\varphi},$$

где g — активная проводимость двухполюсника;

$b = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ — реактивная проводимость;

y — модуль полной реактивной проводимости, следовательно,

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

При этом член $\frac{1}{\omega L}$ называют индуктивной проводимостью и обозначают b_L , а член ωC — емкостной проводимостью и обозначают b_C . Член $\frac{1}{j\omega L}$ называют комплексной индуктивной проводимостью и обозначают Y_L , а член $j\omega C$ — комплексной емкостной проводимостью и обозначают Y_C . Таким образом, комплексная проводимость двухполюсника определится выражением

$$Y = Y_r + Y_L + Y_C.$$

Индуктивная и емкостная проводимости являются модулем комплексных индуктивной и емкостной проводимостей.

Величина φ называется аргументом адмитанса двухполюсника:

$$\varphi = \arg Y = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}. \quad (105)$$

На рис. 47 изображена фазорная диаграмма параллельного контура для случая $\omega C > \frac{1}{\omega L}$. На угол ψ к действительной оси отклонен фазор \dot{U} . Ток в сопротивлении ($\dot{I}_r = g\dot{U}$) совпадает по фазе

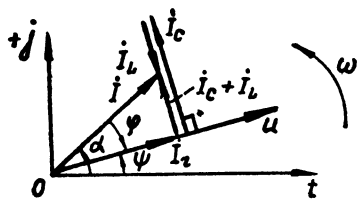


Рис. 47. Фазорная диаграмма для параллельного контура.

с напряжением \dot{U} , ток в емкости ($\dot{I}_c = j\omega C\dot{U}$) опережает по фазе на

угол $\frac{\pi}{2}$ напряжение, а ток в индук-

тивности ($\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L}$) отстает по фа-

зе на угол $\frac{\pi}{2}$ от напряжения.

Следовательно,

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{Y},$$

или, расписывая \dot{I}_m и \dot{U}_m , получаем

$$U_m e^{j\psi} = \frac{I_m e^{j\alpha}}{y e^{-j\varphi}} = \frac{I_m}{y} e^{j(\alpha + \varphi)}.$$

Отсюда находим выражения для U_m и ψ , приравнявая модули и аргументы в левой и правой частях:

$$U_m = \frac{I_m}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}, \quad \psi = \alpha + \varphi.$$

Зная U_m и ψ , переходим к мгновенному значению отклика

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \sin\left(\omega t + \alpha + \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}\right).$$

Из выражения (105), а также из фазорной диаграммы следует, что угол $\varphi > 0$, если $\frac{1}{\omega L} > \omega C$. В этом случае реактивная проводимость носит индуктивный характер. Если $\frac{1}{\omega L} < \omega C$, то угол $\varphi < 0$ и реактивная проводимость имеет емкостный характер (см. рис. 47). Угол φ в этом случае отсчитывается от фазора тока к фазору напряжения. Равенство $b = b_L - b_C$ отражает физический процесс сдвига фаз на π токов в индуктивности и емкости.

Если комплексная проводимость пассивного двухполюсника

$$Y = \frac{i}{\dot{U}},$$

а комплексное сопротивление этого же двухполюсника

$$Z = \frac{\dot{U}}{i},$$

то между Y и Z существует очевидная связь

$$ZY = 1,$$

или

$$(r + jx)(g - jb) = 1,$$

т. е. Y и Z являются обратными величинами для любого пассивного двухполюсника; Y называют **входной проводимостью двухполюсника**. Входное сопротивление и проводимость двухполюсника содержат одинаковую информацию о нем и являются его основными характеристиками.

Отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений физических величин отклика и воздействия называется **системной функцией пассивной цепи**. Входная проводимость есть системная функция пассивного

двухполюсника, если на его входе действует источник э. д. с. Входное сопротивление есть системная функция двухполюсника, если на его входе действует источник тока.

Пример 10. Определить системные функции двухполюсника (рис. 48) Y и Z .

Решение 1. Находим комплексную проводимость

$$Y = \frac{i}{\dot{U}} = \frac{1}{r} + j\omega C = g + j\omega C.$$

2. Находим комплексное сопротивление

$$Z = \frac{\dot{U}}{i} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g + j\omega C}.$$

Освободимся от комплексного выражения в знаменателе. Для этого умножим числитель и знаменатель на число комплексно сопряженное знаменателю:

$$Z = \frac{g - j\omega C}{g^2 + (\omega C)^2} = \frac{g}{g^2 + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{g^2 + (\omega C)^2};$$

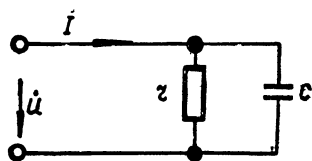


Рис. 148. Двухполюсник с параллельно соединенными элементами.

$$Z = r_0 - j \frac{1}{\omega C_0},$$

где

$$r_0 = \frac{g}{g^2 + (\omega C)^2}; \quad \frac{1}{\omega C_0} = \frac{\omega C}{g^2 + (\omega C)^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$C_0 = \frac{1 + (\omega r C)^2}{\omega^2 r^2 C}.$$

Следовательно, двухполюсник, где элементы r и C соединены параллельно, можно заменить двухполюсником (рис. 49), в котором элементы r_0 и C_0 соединены последовательно. Полученная схема

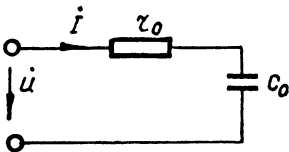


Рис. 49. Схема замещения двухполюсника, изображенного на рис. 48.

называется **схемой замещения двухполюсника**. Особенность полученной схемы состоит в том, что ее элементы зависят теперь от частоты. Это означает, что схему с параллельно соединенными r_0 и C_0 можно заменить схемой с последовательно соединенными r и C . Однако при изменении частоты необходимо изменять элементы r_0 и C_0 . Если же через эти элементы проходит несинусоидаль-

ный ток, то эти схемы не будут эквивалентными. Только в узкой области частот, когда полоса частот сигнала $\Delta\omega$ много меньше средней несущей частоты ω_0 , можно произвести такую замену. Очевидно, можно сделать и обратный переход от схемы, изображенной на рис. 49, к схеме на рис. 48. Этот переход осуществляется следующим образом. Если задана схема с последовательно соединенными элементами, то вначале находим комплексное сопротивление

$$Z = r_0 - j \frac{1}{\omega C_0}.$$

Теперь определяем комплексную проводимость

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r_0 - j \frac{1}{\omega C_0}}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на $r_0 + j \frac{1}{\omega C_0}$. Тогда получим

$$Y = \frac{r_0 + j \frac{1}{\omega C_0}}{r_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C_0}\right)^2} = \frac{r_0}{r_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} + j \frac{\frac{1}{\omega C_0}}{r_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = g + j\omega C,$$

где

$$g = \frac{r_0}{r_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C_0}\right)^2}; \quad \omega C = \frac{1}{r_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C_0}\right)^2}.$$

Как уже отмечалось, входная проводимость и входное сопротивление являются взаимно обратными величинами $YZ=1$. Однако активная проводимость схемы (см. рис. 49) $g = \frac{1}{r}$ не является величиной обратной сопротивлению r_0 в схеме замещения. То же справедливо и относительно реактивной проводимости и сопротивления обеих схем.

Пример 11. Нарисовать фазорную диаграмму для двухполюсника (рис. 50).

Решение. На фазорной диаграмме должны быть изображены фазоры тока и напряжения на всех элементах. На рис. 50 обозначены основные величины. Напряжения на других элементах обозначим индексами этих элементов.

Построение фазорной диаграммы начнем с конца двухполюсника, т. е. с ветви r_2, L_2 . Вдоль действительной оси отложим фазор \dot{I}_{L_2} (рис. 51). Фазор напряжения на сопротивлении r_2 совпадает по фазе с фазором

тока \dot{I}_{L_2} , а фазор напряжения на L_2 опережает фазор тока на угол $\frac{\pi}{2}$. Фазор

напряжения \dot{U}_2 на элементах r_2, L_2 находим как геометрическую сумму фазоров \dot{U}_{r_2} и \dot{U}_{L_2} . Напряжение \dot{U}_2 приложено к емкости C . Фазор тока на емкости \dot{I}_C опережает на $\frac{\pi}{2}$ фазор \dot{U}_2 . Фазор тока

в общей ветви \dot{I} находим как геометрическую сумму фазоров тока \dot{I}_{L_2} и \dot{I}_C .

Фазор напряжения \dot{U}_{r_1} на элементе r_1 совпадает с фазором тока \dot{I} , а фазор напряжения \dot{U}_{L_1} на L_1 опережает по фазе фазор тока \dot{I} на угол $\frac{\pi}{2}$. Фазор напряжения \dot{U}_1 на элементах r_1 и L_1 находим как геометрическую сумму фазо-

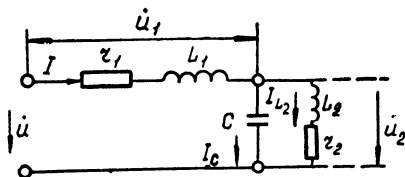


Рис. 50. Двухполюсник.

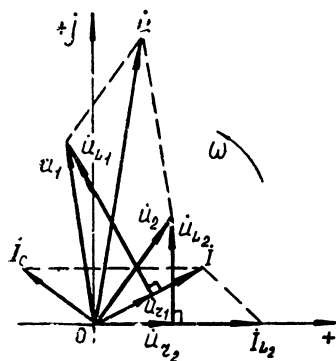
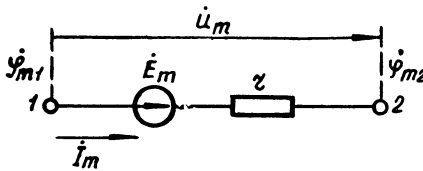


Рис. 51 Фазорная диаграмма для двухполюсника (см. рис. 50).

ров \dot{U}_r и \dot{U}_L . Фазор приложенного напряжения к цепи \dot{U} находим как геометрическую сумму фазоров напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 .

Теперь сформулируем законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Выражение закона Ома для участка цепи без источников энергии в комплексной форме можно записать так:



$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z}; \quad (106)$$

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{Y}.$$

Рис. 52. Ветвь, содержащая источник э. д. с.

Это выражение записано для комплексных амплитуд.

Для комплексных действующих значений закон Ома имеет следующий вид:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z}, \quad (107)$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{i}}{Y},$$

который получается из выражения (106) делением левой и правой частей на $\sqrt{2}$.

Обобщенный закон Ома в комплексной форме выведем на основе рассмотрения комплексных потенциалов ветви, содержащей между зажимами 1 и 2 источник э. д. с.

$\dot{E}_m e^{j\omega t}$ (рис. 52). Для потенциала $\dot{\Psi}_{m1}$ можно записать в комплексной форме:

$$\dot{\Psi}_{m1} = \dot{\Psi}_{m2} + Z\dot{I}_m - \dot{E}_m.$$

Отсюда находим разность потенциалов между точкой 1 и 2:

$$\dot{\Psi}_{m1} - \dot{\Psi}_{m2} = Z\dot{I}_m - \dot{E}_m, \quad \dot{\Psi}_{m1} - \dot{\Psi}_{m2} = \dot{U}_m$$

или окончательно, решая это уравнение относительно \dot{I}_m , получим.

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m + \dot{E}_m}{Z}. \quad (108)$$

Для действующих значений находим

$$\dot{I} = \frac{\dot{U} + \dot{E}}{Z}. \quad (109)$$

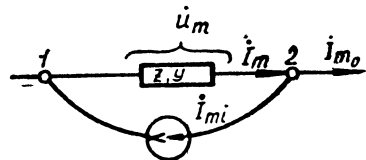


Рис. 53. Ветвь, содержащая источник тока.

Если ветвь содержит источник тока (рис. 53), то в этом случае

$$\dot{I}_{m0} + \dot{I}_{mt} = \dot{U}_m Y. \quad (110)$$

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме записывается в виде:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (111)$$

Его можно прочитать так: алгебраическая сумма комплексных действующих (амплитудных) значений тока в узле равна нулю.

Второй закон Кирхгофа (для контура):

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k, \quad (112)$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных действующих (амплитудных) падений напряжений на элементах цепи равна алгебраической сумме комплексных действующих амплитудных значений э. д. с. Уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме составляются в том же порядке, как и для мгновенных значений тока или напряжения. Комплексные величины одновременно несут информацию об абсолютной величине и фазе, что позволяет эти величины складывать алгебраически. Законы Кирхгофа для амплитудных значений токов и напряжений не применимы. Методы расчета цепей синусоидального тока применимы к расчету цепей постоянного тока, ибо постоянный ток можно представить как синусоидальный ток с угловой частотой, равной нулю ($\omega=0$). Поэтому для цепей постоянного тока $x_L = \omega L = 0$, $x_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$, а $\dot{E}_m e^{j\omega t} = E_m$. О фазе постоянного тока говорить не имеет смысла. Поэтому в цепях постоянного тока все комплексные величины заменяются действительными.

Установим различие между фазорами и комплексными числами. Фазоры в классе алгебраических систем образуют множества, относящиеся к группе. Группой называется **алгебраическая система**, в которой определена только одна алгебраическая операция сложения или умножения. В группе определены также операции вычитания или деления как операции, обратные сложению и умножению. В самом деле, сумма и разность двух фазоров образуют элементы, которые относятся к множеству фазоров, например:

$$\dot{U}_1 e^{j\omega t} \pm \dot{U}_2 e^{j\omega t} = (\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2) e^{j\omega t}.$$

Однако умножение и деление фазоров не образуют элементов, относящихся к фазорам. Так, например:

$$\frac{\dot{U} e^{j\omega t}}{j e^{j\omega t}} = \frac{\dot{U}}{j} = Z;$$

$$\frac{i e^{j\omega t}}{\dot{U} e^{j\omega t}} = \frac{i}{\dot{U}} = Y,$$

где Z и Y относятся к множеству комплексных чисел.

Но, если эти комплексные числа умножить на оператор вращения $e^{j\omega t}$, то их действительные и мнимые части в классе линейных систем с постоянными параметрами никакого физического смысла не имеют. Это значит, что операция умножения на множество фазов не определена.

Комплексные числа, которые при перемножении на оператор вращения $e^{j\omega t}$ образуют фазор, обозначены с точкой наверху. Если комплексное число при перемножении на оператор вращения не образует фазора, как например, Z и Y , то точка наверху не ставится. Умножение фазоров относится к нелинейным операциям. Однако операция умножения фазоров на комплексное число определена. Поэтому сохраняются равенства $\dot{U} = Z\dot{I}$, $\dot{I} = Y\dot{U}$, где Z и Y — действительные или комплексные числа.

В результате перемножения фазоров получается комплексное число, действительная и мнимая части которого не имеют физического смысла, например:

$$\dot{U} e^{j\omega t} \dot{I} e^{j\omega t} = \dot{U} \dot{I} e^{j2\omega t} = UI e^{j(\psi + \alpha + 2\omega t)}.$$

Поэтому операция умножения фазоров в комплексном методе не используется. Множество комплексных чисел образует поле. Полем называется алгебраическая система, для которой определены две операции: сложение и умножение, а также обратные по отношению к ним операции: вычитание и деление.

§ 18. Мощность в цепи синусоидального тока

Мгновенная мощность на входе двухполюсника определяется выражением

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Если напряжение и ток синусоидальны

$$u = U_m \sin(\omega t - \varphi) \text{ и } i = I_m \sin \omega t,$$

то последнее выражение определится уравнением

$$p = 2UI \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (113)$$

Следовательно, скорость поступления энергии в цепь синусоидального тока не постоянная: она является функцией времени.

Мгновенная мощность состоит из двух частей: постоянной величины $UI \cos \varphi$ и синусоидальной — $UI \cos(2\omega t - \varphi)$.

Постоянная величина мгновенной мощности равна средней мощности за период и называется активной мощностью:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi. \quad (114)$$

Активная мощность измеряется в ваттах (*вт*). Множитель $\cos \varphi$ носит название **коэффициента мощности**. Таким образом, активная мощность равна произведению действующих значений напряжений и тока на коэффициент мощности. Для пассивных двухполосников всегда

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

отсюда

$$\cos \varphi \leq 1,$$

поэтому

$$P \leq UI.$$

Только в предельном случае, когда $\varphi = 0$, а $\cos \varphi = 1$, мы имеем $P = UI$. Если $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi = 0$, то $P = 0$.

При передаче информации происходят необратимые потери энергии. В этом случае коэффициент мощности приемников должен стремиться к единице. В случае хранения информации (в энергоемких элементах L и C) коэффициент мощности блоков памяти должен стремиться к нулю.

Величину $S = UI$ называют **полной мощностью**, так как это произведение дает наибольшую возможную активную мощность (при $\cos \varphi = 1$). Так как $U \cos \varphi = U_r = I \cdot r$, а $I \cos \varphi = Ug$, то для активной мощности можно записать:

$$\begin{aligned} P &= z I^2 \cos \varphi = r I^2; \\ P &= y U^2 \cos \varphi = g U^2. \end{aligned} \quad (115)$$

Выражение для полной мощности имеет вид:

$$S = UI = I^2 z = U^2 y. \quad (116)$$

На основании выражения (114) коэффициент мощности равен отношению активной мощности к полной:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (117)$$

При расчетах электрических цепей пользуются также понятием **реактивной мощности**:

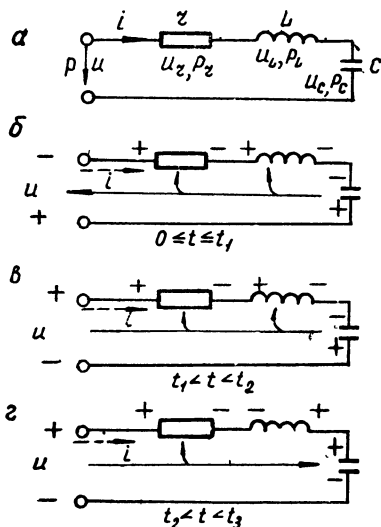
$$Q = UI \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2}. \quad (118)$$

Реактивную мощность принято измерять в вольтамперах реактивных (*вар*). Реактивную мощность также можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= zI^2 \sin \varphi = xI^2; \\ Q &= yU^2 \sin \varphi = bU^2. \end{aligned} \quad (119)$$

Для приемников энергии P и S всегда положительны, но реактивная мощность Q положительна лишь при $\varphi > 0$, т. е. для индуктивных цепей, а при $\varphi < 0$, т. е. для емкостных цепей, она отрицательна.

Для индуктивности и емкости реактивные мощности могут быть представлены следующим образом:



$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = UI =$$

$$= \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L \max};$$

$$Q_C = UI \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -UI =$$

$$= -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{C \max},$$

где $W_{L \max}$ и $W_{C \max}$ — максимальные значения энергии, периодически запасаемые в магнитном и электрическом полях индуктивности и емкости.

Рис. 54. Энергетические процессы в последовательном контуре.

Реактивная мощность двухполюсника, содержащего индуктивность и емкость, пропорциональна разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях:

$$Q = \omega (W_{L \max} - W_{C \max}).$$

Понятие активной мощности, как средней за период T , справедливо для любых периодических напряжений и токов определенной частоты и необязательно для синусоидальных. Понятие же реактивной мощности Q в виде $Q = UI \sin \varphi$ так же, как и выражение активной мощности в форме $P = UI \cos \varphi$, справедливо лишь при синусоидальном процессе.

Если к двухполюснику подключен идеальный источник синусоидальной э. д. с., то все соотношения остаются в силе с заменой U на E .

Рассмотрим колебания энергии в цепи, определяемые вторым слагаемым мгновенной мощности (113). Возьмем цепь из последова-

тельно соединенных элементов r , L , C (рис. 54). Уравнение для напряжений в этой цепи имеет вид:

$$u_r + u_L + u_c = u,$$

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = u.$$

Соответственно для мгновенных мощностей на зажимах цепи и на отдельных элементах цепи получим

$$p = ui = p_r + p_L + p_c = uri + u_L u + u_c i = i^2 r + Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt},$$

или

$$p = i^2 r + \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = i^2 r + \frac{d}{dt} (w_M) + \frac{d}{dt} (w_3).$$

Из последнего выражения следует, что мощность на активном элементе всегда является величиной положительной. Мощности p_L и p_c могут быть положительными и отрицательными. Если u и i синусоидальны, то, положив $u = U_m \sin(\omega t - \varphi)$, а $i = I_m \sin \omega t$, получим для мгновенных значений напряжений на отдельных элементах:

$$u_r = ir = r I_m \sin \omega t; \quad u_L = \omega L I_m \cos \omega t; \quad u_c = - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t.$$

Для мгновенных мощностей на этих же элементах

$$p_r = u_r i = r I_m^2 \sin^2 \omega t = U_r I \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_L = u_L i = \omega L I_m^2 \cos \omega t \sin \omega t = U_L I \sin 2\omega t;$$

$$p_c = u_c i = - \frac{I_m^2}{\omega C} \cos \omega t \sin \omega t = - U_c I \sin 2\omega t.$$

Суммарная мощность на индуктивности и емкости равна

$$p_x = p_L + p_c = (U_L - U_c) I \sin \omega t =$$

$$= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I^2 \sin 2\omega t = x I^2 \sin 2\omega t = U I \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

Из полученного выражения следует, что амплитуда колебания суммарной мощности на L и C равна реактивной мощности $Q = UI \sin \varphi$, а средняя за период мощность на этих элементах равна нулю.

Мощность на зажимах всей цепи определяется выражением (113). Средняя за период мощность на зажимах двухполюсника равна средней за период мощности на элементе r . Все мгновенные мощности изменяются с частотой 2ω , в два раза превышающей частоту тока и напряжения.

На рис. 55, а изображены временные диаграммы мгновенной мощности, тока и напряжения: p_r , i , u_r ; на рис. 55, б — p_L , i , u_L .

В элементе L энергия запасается в магнитном поле индуктивности, когда ток по абсолютной величине возрастает ($p_L > 0$). Энергия возвращается из магнитного поля индуктивности, когда ток по абсолютной величине убывает ($p_L < 0$).

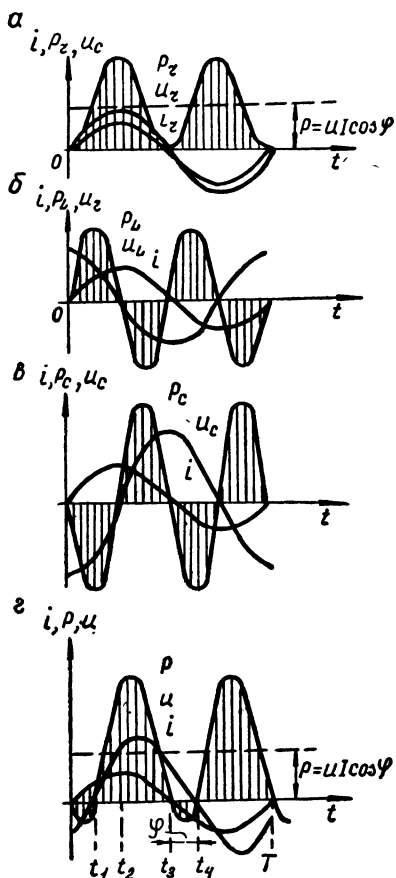


Рис. 55. Временные диаграммы для тока мгновенных мощностей и напряжений в последовательном контуре.

На рис. 55, *в* изображены временные диаграммы для мгновенной мощности, тока и напряжения p_C , i , u_C . Здесь энергия запасается в электрическом поле емкости, когда напряжение на емкости по абсолютному значению растет ($p_C > 0$). Энергия возвращается из электрического поля емкости, когда напряжение на ней по абсолютному значению убывает. Среднее значение мощности на L и C равно нулю. На рис. 55, *г* приведены временные диаграммы мгновенной мощности на входе двухполюсника. Величины получены путем суммирования их на диаграммах рис. 55, *а*, *б* и *в*. Колебания мгновенной мощности происходят около среднего значения $P = UI \cos \varphi$ с амплитудой UI . Ток i опережает напряжение u на угол φ . В интервалах времени от t_1 до t_3 и от t_4 до T мгновенная мощность на зажимах двухполюсника положительна ($p > 0$) и энергия поступает от источника в цепь. В интервалах времени от 0 до t_1 и от t_3 до t_4 мгновенная мощность на зажимах двухполюсника отрицательна ($p < 0$) и энергия возвращается к источнику.

Действительные направления тока показаны для различных интервалов пунктирной стрелкой, а действительные направления напряжений на зажимах двухполюсника и на всех элементах — знаками (+) и (—) (см. рис. 54, *б*, *в*, *г*). Стрелками указаны направления потоков энергии в соответствующие интервалы времени.

Схема (см. рис. 54, *б*) соответствует интервалу времени $0 < t < t_1$, в течение которого ток i увеличивается, напряжение по абсолютной величине уменьшается до нуля, энергия из емкости поступает в индук-

тивность, сопротивление к источнику. В этот интервал времени $p < 0$. Момент t_1 характерен возрастанием величины $i^2 r$ настолько, что скорость уменьшения энергии в емкости выравнивается со скоростью ее поступления в сопротивление r и индуктивность L . В этот момент мощность на зажимах двухполюсника равна нулю. Энергия в цепь не поступает.

Схема на рис. 54, в соответствует интервалу времени $t_1 < t < t_2$, в течение которого ток i продолжает увеличиваться, напряжение u растет и энергия из емкости C и источника поступает в сопротивление и индуктивность. В этот интервал времени $p > 0$.

Схема на рис. 54, г соответствует интервалу времени $[t_2, t_3]$. Ток i в этом интервале убывает до нуля, и энергия возвращается из магнитного поля индуктивности, частично поступая в емкость, которая при этом заряжается, частично превращаясь в тепло в сопротивлении r . Источник так же, как и в предыдущем интервале времени, посылает энергию в цепь, частично компенсируя потери в элементе. При t_3 никаких преобразований энергии не происходит. Момент соответствует половине периода тока $\left(\frac{T}{2}\right)$. В нем полностью завершается один цикл колебания энергии, так как период мгновенной мощности в два раза меньше периода тока. В следующую половину периода изменения тока энергетический процесс повторяется и только действительные направления тока и всех напряжений меняются на противоположные.

Установим комплексную форму записи мощности. Ранее отмечалось, что в результате операции умножения и деления фазоров друг на друга получается новое комплексное число, которое не входит в множество фазоров. В выражение для мгновенной мощности входит произведение тока и напряжения. Если воспользоваться ранее установленным правилом перехода к комплексной форме записи, то получим комплексное число, действительная и мнимая части которого не имеют физического смысла. Рассмотрим это на примере. Выражение для мгновенной мощности имеет вид

$$p = ui.$$

Согласно правилу перехода к символической форме записи комплекс мощности можно записать так:

$$p_k = u_k i_k = \dot{U} e^{j\omega t} \dot{I} e^{j\omega t} = UI e^{j(2\omega t + \psi + \alpha)}.$$

Очевидно, $UI \cos(2\omega t + \psi + \alpha)$ и $UI \sin(2\omega t + \psi + \alpha)$ не имеют ясного физического смысла. Это вполне естественно, так как операция образования мощности не относится к числу линейных операций.

Однако, если образовать произведение комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока или комплекс тока на сопряженный комплекс напряжения, то мы получим комплексное число, действи-

тельная и мнимая части которого совпадают с активной и реактивной мощностью:

$$u_{\kappa} \dot{i}_{\kappa}^* = \dot{U} e^{j\omega t} \dot{I}^* e^{-j\omega t} = U e^{j\psi} I e^{-j\alpha} = UI e^{j(\psi-\alpha)}.$$

Комплексную величину, равную произведению комплексного напряжения на комплексно сопряженное значение тока, называют **комплексной мощностью**:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI e^{j(\psi-\alpha)} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi, \quad (120)$$

или

$$\tilde{S} = P + jQ. \quad (121)$$

Отсюда следует, что модуль комплексной мощности равняется полной мощности:

$$|\tilde{S}| = S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (122)$$

Комплексной мощностью называется **комплексное число**, действительная часть которого является **активной мощностью**, а мнимая часть — **реактивной**. Если комплексное сопряженное напряжение \dot{U} умножить на комплексный ток \dot{I} , то получится выражение комплексной мощности:

$$\dot{U} \dot{I} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ.$$

Мощности P и Q на зажимах цепи могут быть записаны так:

$$P = \frac{1}{2} (\dot{U} \dot{I} + \dot{U} \dot{I}^*);$$

$$Q = \frac{1}{2j} (\dot{U} \dot{I} - \dot{U} \dot{I}^*).$$

Комплексное сопротивление цепи можно вычислить, если известны комплексная мощность \tilde{S} и действующее значение тока I :

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Z \dot{I} \dot{I}^* = Z I^2,$$

отсюда

$$Z = \frac{\tilde{S}}{I^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{Q}{I^2},$$

учитывая, что

$$Q = \omega (W_{L \max} - W_{C \max}),$$

получим

$$Z = \frac{P}{I^2} + j \frac{\omega}{I^2} (W_{L \max} - W_{C \max}).$$

Эта формула справедлива при любой схеме соединений сопротивлений, индуктивности и емкостей. Определение комплексного сопротивления с помощью последней формулы положено в основу энергетического метода определения Z .

Применительно к комплексной проводимости имеем:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I} = \dot{U} \dot{U} \dot{Y} = U^2 \dot{Y},$$

откуда

$$\dot{Y}^2 = \frac{\tilde{S}}{U^2},$$

где \dot{Y} — комплексная проводимость, сопряженная с Y .
Окончательно

$$Y = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} = \frac{P}{U^2} + j \frac{\omega}{U^2} (W_{C \max} - W_{L \max}).$$

Следовательно, активные сопротивления и проводимость цепи зависят от поглощаемой цепью активной мощности, а реактивные сопротивления и проводимость — от разности максимальных значений энергии, запасаемых в магнитных и электрических цепях.

§ 19. Условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику. Баланс мощностей

На практике часто возникает вопрос подбора комплексного сопротивления нагрузки таким образом, чтобы при заданном комплексном сопротивлении источника обеспечивалась передача максимума активной мощности от источника к приемнику. Установим условия передачи максимума активной мощности от источника к приемнику. На рис. 56 изображена цепь с источником э. д. с. E и комплексными сопротивлениями источника и нагрузки соответственно:

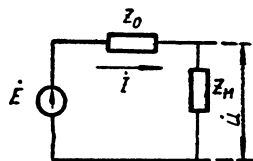


Рис. 56. Передача энергии от источника к приемнику.

$$Z_0 = r_0 + jx_0, \quad Z_H = r_H + jx_H.$$

Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна

$$P = \operatorname{Re} (\dot{U} \dot{I}) = \operatorname{Re} \frac{\dot{E} Z_H \dot{E}}{Z Z^*},$$

так как

$$\begin{aligned} \dot{E} &= E e^{j\psi}, & \dot{E} &= E e^{-j\psi}, & Z &= z e^{j\varphi}; \\ \dot{Z} &= z e^{-j\varphi}, & Z_H &= z_H e^{j\varphi_H}, & Z &= Z_0 + Z_H, \end{aligned}$$

то

$$P = \operatorname{Re} \frac{E e^{j\psi} E e^{-j\psi} z_H e^{j\varphi_H}}{z e^{j\varphi} z e^{-j\varphi}} = \frac{E^2 z_H \cos \varphi_H}{z^2}.$$

Заменив z^2

$$z^2 = |Z_0 + Z_H|^2 = z_0^2 + z_H^2 + 2z_0 z_H \cos (\varphi_H - \varphi_0),$$

получаем выражение для мощности

$$P = \frac{E^2 z_n \cos \varphi_n}{z_0^2 + z_n^2 + 2z_0 z_n \cos (\varphi_n - \varphi_0)} . \quad (123)$$

Равенство (123) показывает, что активная мощность является функцией модуля z_n и аргумента φ_n сопротивления нагрузки. Выражение для активной мощности можно записать так:

$$P = r_n I^2 = \frac{E^2 r_n}{(r_0 + r_n)^2 + (x_0 + x_n)^2} .$$

Для определения условий, при которых активная мощность является максимально возможной (глобальной), рассмотрим выражение

$$dP = \frac{\partial P}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial P}{\partial \varphi_n} d\varphi_n = 0 .$$

Если z_n и φ_n не фиксированы, то для экстремума требуется, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial z_n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi_n} = 0 .$$

Если одна производная равна нулю, но другая не равна нулю, то максимум будет локальным, т. е. местным. Значит максимум будет определен при фиксированной второй величине. Найдем местный максимум для P при условии, что задан коэффициент мощности приемника φ_n . Для этого рассмотрим величину:

$$\frac{\partial P}{\partial z_n} = \frac{z_0^2 + z_n^2 + 2z_0 z_n \cos (\varphi_n - \varphi_0) - z_n [2z_n + 2z_0 \cos (\varphi_n - \varphi_0)]}{[z_0^2 + z_n^2 + 2z_0 z_n \cos (\varphi_n - \varphi_0)]^2} E^2 \cos \varphi_n .$$

Если это выражение приравнять нулю, найдем

$$z_0 = z_n . \quad (124)$$

Результат показывает, что когда угол сопротивления нагрузки φ_n сохраняется постоянным, то поглощаемая мощность максимальна, если модуль сопротивления нагрузки равен модулю внутреннего сопротивления источника э. д. с., который питает цепь.

При выполнении условия (123) обеспечивается передача и максимальной полной мощности в нагрузку при заданном φ_n . Действительно,

$$S = \frac{P}{\cos \varphi_n} .$$

При заданном φ_n величина S остается постоянной. Отсюда максимуму P при этих условиях соответствует максимум S .

Найдем местный максимум для P при условии, что z_n задано. Для этого рассмотрим равенство

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_n} = \frac{[z_n^2 + z_0^2 + 2z_n z_0 \cos (\varphi_n - \varphi_0)] (-z_n \sin \varphi_n) + 2z_0 z_n^2 \sin (\varphi_n - \varphi_0) \cos \varphi_n}{[z_0^2 + z_n^2 + 2z_0 z_n \cos (\varphi_n - \varphi_0)]^2} E^2 .$$

Приравнявая это выражение нулю, находим

$$\sin \varphi_n = - \frac{2z_0 z_n}{z_0^2 + z_n^2} \sin \varphi_0. \quad (125)$$

Этот результат показывает, что когда модуль сопротивления нагрузки остается постоянным, то поглощаемая мощность максимальна при условии, что угол подобран в соответствии с выражением (125).

Если одновременно соблюдаются условия, при которых $\frac{\partial P}{\partial z_n}$ и $\frac{\partial P}{\partial \varphi_n}$ равны нулю, то мы имеем глобальный максимум. При этом $z_n = z_0$, $\sin \varphi_n = - \sin \varphi_0$ или $\varphi_n = - \varphi_0$. Когда эти условия соблюдаются, Z_n является комплексной сопряженной величиной Z_0 . В этом случае реактивные элементы взаимно компенсируют друг друга так, что результирующее сопротивление цепи становится чисто активным. При соблюдении этого условия приемник потребляет мощность

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4r_n}.$$

При этом половина мощности источника рассеивается в r_0 , оставшаяся половина потребляется нагрузкой. Отсюда к. п. д., определяемый как отношение активной мощности, потребляемой приемником, к суммарной мощности, поглощаемой активными сопротивлениями цепи, равен 0,5.

В радиотехнических, автоматических, измерительных системах, где мощности малы, стремятся нагрузку согласовать по условию получения максимально возможной активной мощности в нагрузке. В энергетических же системах, генерирующих и потребляющих большие мощности, стремятся обеспечить высокий к. п. д. генераторов, поэтому сопротивления нагрузок значительно превышают сопротивления генераторов.

Рассмотрим вопрос о балансе мощностей. В любой линейной электрической цепи сумма активных мощностей всех источников энергии равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей всех источников энергии равна сумме реактивных мощностей приемников энергии. Закон баланса мощностей следует непосредственно из закона сохранения энергии и теоремы Ланжевена.

Для цепи (см. рис. 56) можно записать:

$$\dot{E} = \dot{I} (Z_0 + Z_n).$$

Умножим это выражение на \dot{I} :

$$\dot{E}\dot{I} = \dot{I}\dot{I}(Z_0 + Z_n) = I^2 r + jI^2 x,$$

где

$$r = r_0 + r_n, \quad x = x_0 + x_n,$$

тогда

$$Ee^{j\psi} / e^{-j\alpha} = I^2 \cdot r + jI^2 x,$$

или, учитывая, что $\psi - \alpha = \varphi$, и приравнявая действительные и мнимые части, получим

$$EI \cos \varphi = I^2 \cdot r;$$

$$EI \sin \varphi = I^2 x,$$

где $EI \cos \varphi$ и $I^2 r$ — активные мощности источника и цепи;

$EI \sin \varphi$ и $I^2 x$ — реактивные мощности источника и цепи.

§ 20. Цепи при экспоненциальном воздействии. Метод комплексной частоты

Рассмотрим поведение цепи при экспоненциальном воздействии. Экспоненциальной функцией времени называется функция вида:

$$f(t) = Ae^{pt} \quad \forall t. \quad (126)$$

Здесь A и p в общем случае являются комплексными числами. При этом A есть значение экспоненциальной функции при $t=0$.

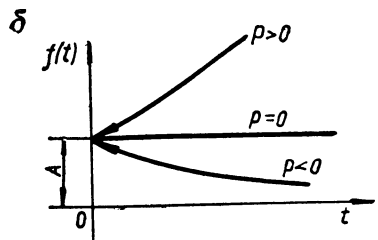
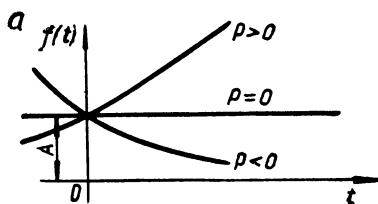


Рис. 57. Экспоненциальные и усеченные экспоненциальные функции при действительных A и p .

Размерность A совпадает с размерностью самой функции. Число p имеет размерность $[t^{-1}]$. В наиболее простом случае A и p — действительные числа. Областью существования функции является вся ось действительных чисел. На рис. 57, а изображены экспоненциальные функции при A и p действительных. На рис. 57, б изображены усеченные экспоненциальные функции. Уравнение таких функций записывается так:

$$f(t) = Ae^{pt} \cdot 1_{-1}(t) \quad (127)$$

при условии, что A и p действительны. Область существования усеченных экспоненциальных функций — все положительные действительные числа. Экспоненциальные функции при $p > 0$ являются

абстракцией. Сигналы, соответствующие этим функциям, имеют бесконечно большую энергию. Однако экспоненциальные функции для действительных A и p в природе встречаются часто, а математические свойства этих функций имеют ряд особенностей.

Экспоненциальные функции называются функциями пропорционального роста. По такому закону изменяются физические величины в том случае, когда изменения этой величины пропорциональны значению самой величины в данный момент времени.

Рассмотрим следующий пример. Требуется установить, по какому закону во времени растет в современном обществе объем научной информации. Для решения этой задачи предположим, что этот объем увеличивается пропорционально количеству информации $J(t)$ в момент времени t . Тогда можно записать,

$$dJ = pJ(t) dt$$

или

$$\frac{dJ}{J} = p dt.$$

Здесь p — постоянное действительное число. Интегрируя правую и левую части, получим

$$\ln J + C = pt.$$

Обозначая C через новую постоянную — $\ln A$, окончательно определяем

$$J = Ae^{pt} \quad 1_{-1}(t).$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий: при $t=0$, $J=J_0$. Следовательно, $A=J_0$. Окончательно для количества информации получаем:

$$J = J_0 e^{pt} \quad 1_{-1}(t).$$

При сделанных предположениях объем научной информации с течением времени изменяется по экспоненциальному закону. По экспоненциальному закону убывает амплитуда напряжения свободных колебаний на емкости колебательного контура.

В математическом отношении экспоненциальная функция обладает следующими свойствами:

1. Конечное множество экспоненциальных функций переходит в само себя, когда t заменяется на $t+\tau$, где τ — любое действительное число. Например, если $f(t) = Ae^{pt}$, то

$$f(t+\tau) = Ae^{p(t+\tau)} = Ae^{p\tau}e^{pt} = A_1 e^{pt},$$

где A_1 новая постоянная величина. Таким образом, $f(t)$ и $f(t+\tau)$ отличаются только коэффициентами. Функция неизменна относительно сдвига во времени. Это очень важное свойство. Благодаря ему не требуется сведений о начале отсчета. Этим же свойством обладают еще два класса функций. Первый класс включает в себя линейные комбинации функций

$$1, x, x^2, \dots, x^n,$$

что совпадает с классом всех многочленов степени n . Второй класс образует синусоидальные функции.

В теории цепей и систем при решении дифференциальных уравнений и выборе аппроксимирующих функций часто нет естественного начала отсчета, и в этом случае наиболее целесообразно выбрать одну из этих функций.

2. Конечное множество экспоненциальных функций так же, как и множества двух других упомянутых выше классов функций, переходит само в себя при дифференцировании и интегрировании. На-

пример, если $f(t) = Ae^{pt}$, то $f'(t) = Ape^{pt}$, а $\int_{-\infty}^t Ae^{pt} dt = \frac{Ae^{pt}}{p}$, если

$\operatorname{Re} p > 0$. При этих операциях изменяются только коэффициенты экспоненциальной функции. Следовательно, этот класс функций инвариантен относительно операций дифференцирования и интегрирования. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к алгебраическим операциям над функциями этого класса.

3. Экспоненциальные функции являются собственными функциями стационарных линейных преобразований. Это свойство особенно важно, когда рассматриваются свойства инвариантных линейных систем. Это свойство будет нами рассмотрено ниже.

Теперь установим связь между экспоненциальными функциями и синусоидальными. Выше указывалось, что в выражении $f(t) = Ae^{pt}$ A и p могут быть любыми комплексными числами, а t — действительное время. Обозначим $p = \sigma + j\omega$. Тогда на основании формулы Эйлера запишем:

$$Ae^{pt} = Ae^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

Экспоненциальные функции выражаются через синусоидальные функции. Экспоненциальная функция Ae^{pt} имеет физический смысл не при любых значениях p . Однако вещественная и мнимая части e^{pt} являются вещественными функциями времени и имеют ясный физический смысл. Введение экспоненциального воздействия при комплексном p расширяет сведения о свойствах линейной пассивной цепи и системы. Для исследования общих свойств цепи и систем введем понятие комплексной частоты:

$$p = \sigma + j\omega. \quad (128)$$

Следует заметить, что понятие комплексной частоты более подходит к величине $\Omega = \frac{p}{j} = \omega - j\sigma$, так как в этом случае ω определяет обычную частоту, а σ — затухание. Однако в литературе за комплексную частоту чаще принимают величину p . Комплексная частота p имеет размерность, обратную времени. Ее вещественная часть измеряется в неперях и децибелах в секунду, а мнимая является реальной угловой частотой и измеряется в радианах в секунду. Не следует называть реальную частоту частью комплексной частоты.

При введении комплексной частоты напряжение вида

$$Ue^{j\psi}e^{pt} = Ue^{\sigma t}e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{U}e^{pt}$$

представляет обобщенную форму воздействующей функции, записанную в символической форме. Действительная и мнимая части этой функции $Ue^{\sigma t} \cos(\omega t + \psi)$ и $Ue^{\sigma t} \sin(\omega t + \psi)$ изображают реальные

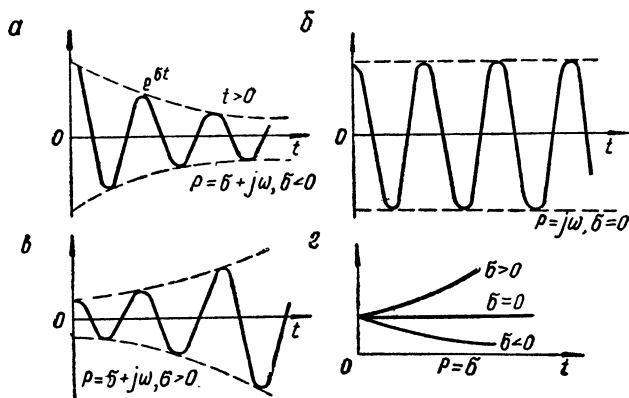


Рис. 58. Изображение $Re \dot{U}e^{pt} = Ue^{\sigma t} \cos(\omega t + \psi)$ для различных значений σ и ω (при $t > 0$ и $\psi = 0$):

а, б, в — $u(t) = Re \dot{U}_m e^{pt} \cdot 1(t)$; г — $u(t) = Re \dot{U}_m e^{pt}$.

экспоненциально возрастающие или затухающие косинусоиду или синусоиду. На рис. 58 изображен вид этих функций для различных p и для $t > 0$. Условие $\omega \neq 0$ (рис. 58, а, б, в) соответствует косинусоидальному колебанию с изменяющейся (рис. 58, а, в) или постоянной (см. рис. 58, б) амплитудой: при положительном значении σ амплитуда колебаний возрастает, а при отрицательном значении σ — убывает. Случай $\sigma = 0$ соответствует колебанию с неизменной амплитудой. Условие $\omega = 0$ (или $p = \sigma$) соответствует показательной функции или постоянной величине: при $\sigma > 0$ функция возрастает, при $\sigma < 0$ — убывает, при $\sigma = 0$ — постоянна (рис. 58, г).

Метод расчета цепей с использованием комплексной частоты называется **методом комплексной частоты**. Его применение расширяет класс воздействующих функций по сравнению с гармоническим, позволяет выявить более общие свойства линейных пассивных цепей; при этом полностью сохраняются преимущества символического метода. Это объясняется тем, что гармонические функции являются сами подмножеством множества экспоненциальных функций. Введение функции возмущения в виде $\dot{E}_m e^{pt}$ позволяет также осуществить единый подход к исследованию цепей постоянного и переменного тока в установившемся и переходном режимах.

Метод комплексной частоты есть метод нахождения амплитуд и начальных фаз экспоненциального отклика при экспоненциальном воздействии. Метод комплексной частоты применим для нахождения принужденного режима при экспоненциальном воздействии для линейных цепей и систем, инвариантных во времени. Метод комплексной частоты мы будем называть также обобщенным символическим методом. При этом методе действительные экспоненциальные функции символически изображаются комплексными числами.

Пусть имеется экспоненциально изменяющийся ток

$$i = I_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha),$$

который представим в виде

$$i = I_m \{I_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \alpha)}\} = I_m \{\dot{I}_m e^{p t}\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, называется **обобщенным комплексом тока**

$$i_{\Phi} = I_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{I}_m e^{p t}. \quad (129)$$

Рассмотрим это выражение как символическое изображение действительного экспоненциального тока $i = I_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha)$. Оно несет такое же количество информации, как и действительный ток. Так, например, если $i = 6 \cdot 10^{-10} t \sin(10^8 t + 45^\circ) \text{ а}$, то обобщенный комплекс тока равен $i_{\Phi} = 6 \cdot 10^{-10} t e^{j45^\circ} e^{j10^8 t}$. Из выражения (129) следует, что при обобщенном символическом методе или методе комплексной частоты вместо оператора вращения $e^{j\omega t}$ применяется оператор, одновременно учитывающий затухание и вращение $e^{p t} = e^{(\sigma + j\omega) t}$. Если $\sigma = 0$, то $p = j\omega$. Между экспоненциальной функцией и ее символическим обозначением существует однозначное соответствие:

$$i = I_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha) \doteq \dot{I}_m,$$

где \dot{I}_m — комплексная амплитуда тока ($\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha}$), а величина $I_m e^{\sigma t}$ — огибающая комплексной амплитуды тока. Аналогичное выражение можно записать и для экспоненциальных напряжений и э. д. с. Обобщенные комплексы тока, напряжения и э. д. с. являются фазорами действительной временной функции. Операция преобразования действительной экспоненциальной функции в фазор является линейной операцией.

Следует также отметить, что множество экспоненциальных функций является замкнутым относительно сложения и умножения на действительные постоянные величины. Замкнутость множества относительно сложения означает, что любая сумма вида

$$A e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha) + B e^{\sigma t} \sin(\omega t + \beta)$$

может быть написана в форме $C e^{\sigma t} \sin(\omega t + \gamma)$.

Между множеством действительных экспоненциальных функций и множеством фазоров существует отношение изоморфизма. Системы (или множество) являются изоморфными при взаимно однозначном отображении, которое сохраняется при соответствующих операциях. Так как множество экспоненциальных функций образует линейное пространство, то и множество фазоров образуют линейное пространство. Поэтому фазоры экспоненциальных функций обладают свойством аддитивности и однородности.

Пример 12. Генератор тока (рис. 59) подключен к параллельному контуру из сопротивления и емкости. Определить $u(t)$, если $i(t) = 10e^{10^6 t} \sin(10^6 + 2)a$, а $r = 0,5 \text{ ом}$ и $C = 4 \text{ мкф}$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение, связывающее величины i и u :

$$i = i_r + i_c; \quad i_r = \frac{u}{r}; \quad q_c = Cu,$$

отсюда

$$i_c = Cu',$$

следовательно,

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} = i.$$

Предполагая, что решение существует, найдем u из выражения

$$u = U_m e^{10^6 t} \sin(10^6 t + \psi).$$

σ и ω известны:

$$\sigma = 10^6 \text{ 1/сек}, \quad \omega = 10^6 \text{ рад/сек},$$

тогда

$$p = 10^6 + j10^6 \text{ рад/сек}.$$

Нахождение решения дифференциального уравнения сводится к определению U_m и ψ . Применяя к дифференциальному уравнению преобразование H , найдем

$$Cp \dot{U}_m e^{pt} + \frac{\dot{U}_m e^{pt}}{r} = \dot{I}_m e^{pt}.$$

Сокращая правую и левую части на e^{pt} , получим

$$Cp \dot{U}_m + \frac{\dot{U}_m}{r} = \dot{I}_m,$$

отсюда

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{\frac{1}{r} + pC} = Z(p) \dot{I}_m.$$

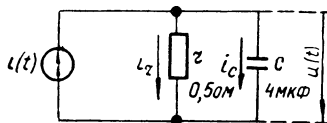


Рис. 59. Цепь с параллельным контуром из сопротивления и емкости.

Для рассматриваемого примера $r=0,5 \text{ ом}$; $C=4 \cdot 10^{-6} \text{ ф}$; $\dot{I}_m = 10e^{j \cdot 2}$; $p=10^6 + j^{10^6}$, тогда

$$\dot{U}_m = \frac{10e^{j \cdot 2}}{2 + 4 \cdot 10^{-6} (10^6 + j^{10^6})} = \frac{10e^{j \cdot 2}}{6 + j4} = \frac{10}{\sqrt{52}} e^{j(2 - \arctg 2/3)},$$

или

$$\dot{U}_m = 1,4 \cdot e^{j0,1} \text{ в}, U_m = 1,4 \text{ в}, \psi = 0,1 \text{ рад}.$$

Переходя к действительным величинам, получаем

$$u(t) = 1,4e^{10^6 t} \sin(10^6 t + 0,1).$$

Пример 13. Определить ток в цепи с последовательным соединением r, L, C (рис. 60), если на входе цепи действует напряжение

$$u(t) = U_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \psi).$$

Решение 1. Составляем дифференциальное уравнение цепи:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}.$$

2. Решение для принужденной составляющей тока будем искать в форме

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \alpha).$$

В этом выражении σ и ω заданы ($p = \sigma + j\omega$). Поэтому решение задачи по отысканию тока принужденного режима сводится к определению I_m и α .

Эти величины будем находить с помощью обобщенного символического метода. Для этого заменим i и u их фазорами \dot{i}_ϕ и \dot{u}_ϕ . В результате такой замены получим

$$L p^2 \dot{i}_m e^{pt} + r p \dot{i}_m e^{pt} + \frac{\dot{i}_m e^{pt}}{C} = p \dot{U}_m e^{pt},$$

или, сокращая на e^{pt} , будем иметь

$$\dot{i}_m \left(r + pL + \frac{1}{pC} \right) = \dot{U}_m.$$

Обозначив $Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}$, получаем

$$\dot{i}_m Z(p) = \dot{U}_m,$$

отсюда

$$\dot{i}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(p)}.$$

Последнее выражение дает возможность определить $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha}$, так как $Z(p)$ задано.

3. После определения \dot{I}_m находим мгновенное значение тока $i(t)$.

Из примеров следует, что при решении задач методом комплексной частоты достаточно в выражении для комплексного сопротивления $Z(j\omega)$ заменить $j\omega$ на $p = \sigma + j\omega$. В остальном порядок нахождения комплексных амплитуд сохраняется тот же, что и для символического метода, развитого для гармонического воздействия.

При этом все свойства символического метода, рассмотренные ранее, сохраняются и для комплексной частоты.

Комплексные сопротивления и проводимости, в которых $j\omega$ заменено на $p = \sigma + j\omega$, в дальнейшем будем называть **обобщенными комплексными сопротивлениями и проводимостями**.

Таким образом, можно дать следующее определение этим величинам.

Обобщенным комплексным сопротивлением называется отношение обобщенного комплексного напряжения к обобщенному комплексному току на входе пассивного двухполюсника:

$$Z(p) = \frac{\dot{U}_m e^{pt}}{\dot{I}_m e^{pt}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}. \quad (130)$$

Это сопротивление также называется входным сопротивлением двухполюсника.

Обобщенной комплексной проводимостью называется отношение обобщенного комплексного тока к обобщенному напряжению на входе пассивного двухполюсника:

$$Y(p) = \frac{\dot{I}_m e^{pt}}{\dot{U}_m e^{pt}} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m}. \quad (131)$$

Эта проводимость также называется входной проводимостью двухполюсника. $Z(p)$ и $Y(p)$ являются величинами взаимнообратными.

Для последовательно соединенных r , L и C элементов

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}. \quad (132)$$

Проанализируем это выражение и сравним его с комплексным сопротивлением $Z(j\omega)$. Для этого комплексное число выражения (132) запишем в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} Z(\sigma, j\omega) &= r + (\sigma + j\omega)L + \frac{1}{(\sigma + j\omega)C} = r + \sigma \left[L + \frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)C} \right] + \\ &+ j \left[\omega L - \frac{\omega}{(\sigma^2 + \omega^2)C} \right]. \end{aligned} \quad (133)$$

Напишем это выражение в показательной форме:

$$Z(\sigma_1 j\omega) = ze^{j\varphi} = \sqrt{\left[r + \sigma \left(L + \frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)C}\right)\right]^2 + \left(\omega L - \frac{\omega}{(\sigma^2 + \omega^2)C}\right)^2} \cdot e^{j\varphi},$$

где φ — аргумент $Z(p)$;

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{\omega}{(\sigma^2 + \omega^2)C}}{r + \sigma \left[L + \frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)C}\right]}. \quad (134)$$

Если в выражениях (133), (134) принять $\sigma = 0$, то они преобразуются в обычные формулы для комплексного сопротивления, его модуля и аргумента. В то же время из этих выражений можно извлечь дополнительную информацию о характере изменения модуля и аргумента обобщенного входного сопротивления $Z(p)$, когда изменяется амплитуда синусоидального колебания. В частности, из уравнения следует, что если удовлетворится условие

$$r + \sigma \left[L + \frac{1}{(\sigma^2 + \omega^2)C}\right] = 0,$$

то при таком режиме мощность в цепи не потребляется. Это условие удовлетворяется, если $\sigma = -\frac{r}{2L}$, а $\omega^2 = \omega_c^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2$, тогда

$$r - \frac{r}{2L} \left[L + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}\right)C} \right] = 0.$$

Если в уравнениях (133) и (134) принять $C = \infty$, то последовательный контур будет состоять только из последовательно соединенных сопротивления и индуктивности:

$$Z(\sigma, j\omega) = r + \sigma L + j\omega L = \sqrt{(r + \sigma L)^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi};$$

$$\text{mod } Z = \sqrt{(r + \sigma L)^2 + (\omega L)^2};$$

$$\arg Z = \arctg \frac{\omega L}{r + \sigma L}.$$

Если на входе двухполосника действует э. д. с. $e(t) = E_m e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$, то в цепи ток принужденного режима будет равен:

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{(r + \sigma L)^2 + (\omega L)^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

а комплексная амплитуда в начальный момент ($t=0_+$) будет определяться выражением

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha} = \frac{U_m e^{j\psi}}{Z(\sigma, j\omega)} = \frac{U_m e^{j\psi}}{r + \sigma L + j\omega L}.$$

Если амплитуда э. д. с. будет убывать по экспоненте $E(t) = E_m e^{-\frac{r}{L}t}$, $\sigma = \frac{r}{L}$, то $r + \sigma L = 0$. При таком режиме ток $i(t)$ будет сдвинут по фазе относительно напряжения $u(t)$ на угол 90° . В этом случае цепь активную, мощность потреблять не будет; на сопротивлении r активная мощность будет расходоваться за счет уменьшения энергии в L .

Обобщенная комплексная проводимость $Y(p)$ определяется так же, как и комплексная проводимость $Z(p)$ при применении символического метода, в частности для параллельного контура

$$Y(p) = g + \frac{1}{pL} + pC. \quad (135)$$

Законы Ома и Кирхгофа также могут быть записаны в обобщенной комплексной форме. Для этого необходимо $j\omega$ заменить на p . Выражения (60), (61) определяют закон Ома в обобщенной комплексной форме для участка цепи.

Какие преимущества в изучении свойств цепей и систем дает нам введение экспоненциальной функции в виде функции возмущения? Нами рассмотрены два свойства экспоненциальных функций. Установим третье свойство. В соответствии с этим свойством экспоненциальные функции являются собственными функциями линейных операторов. Поясним это свойство на примере простых преобразований. Ими, в частности, являются преобразования заданных источника э. д. с. в ток или источника тока в напряжение в цепи двухполюсника. При действии источника экспоненциального тока на входе двухполюсника принужденная составляющая напряжения на входе

$$\dot{U}_m e^{pt} = Z(p) \dot{I}_m e^{pt}.$$

В соответствии с этим равенством комплексная амплитуда тока \dot{I}_m преобразуется двухполюсником в комплексную амплитуду напряжения путем простой операции умножения на обобщенное комплексное сопротивление двухполюсника $Z(p)$, следовательно,

$$H[\dot{I}_m e^{pt}] = Z(p) \dot{I}_m e^{pt}. \quad (136)$$

В теории операторов и ее применениях первостепенную роль играет понятие спектра оператора. Пусть H — линейный оператор в n -мерном пространстве E^n . Число λ называется собственным значением оператора H , если уравнение $Hx = \lambda x$ имеет не нулевые решения. Совокупность всех собственных значений называется спектром оператора H . В элементарной теории интегральных уравнений спектр вводится как совокупность характеристических чисел этого уравнения.

Функция x , для которой справедливо $Hx = \lambda x$, называется собственной функцией преобразования. Таким образом, в равенстве (136) $Z(p)$ — собственное значение, соответствующее собственной функции $\dot{I}_m e^{pt}$.

В выражении

$$\dot{I}_m e^{pt} = Y(p) \dot{U}_m e^{pt},$$

которое можно записать так:

$$H [\dot{U}_m e^{pt}] = Y(p) \dot{U}_m e^{pt},$$

$Y(p)$ является собственным значением, соответствующим собственной функции $\dot{U}_m e^{pt}$. Отсюда можно сделать вывод о том, что при линейных стационарных преобразованиях экспоненциальные функции e^{pt} являются собственными функциями этих преобразований. Поэтому, если определено правило для вычисления собственных значений, то при любом воздействии вида

$$\dot{f}(t) = \sum_k A_k e^{p_k t}$$

преобразованная системой функция, т. е. отклик, находится в виде

$$H[\dot{f}(t)] = \sum_k A_k Z(p_k) e^{p_k t},$$

вследствие линейности преобразования.

Если воздействие нельзя представить в форме ряда или полинома или такое представление считается нецелесообразным, то отклик системы нельзя найти путем операции умножения собственного значения оператора системы на воздействие. В этом случае приходится применять преобразование Лапласа или интеграл суперпозиции (интеграл свертки).

Таким образом, при воздействии на систему колебаний, находящихся в классе экспоненциальных функций, все задачи по расчету отклика сводятся к определению собственных значений оператора H системы. Собственные значения оператора системы принято

называть системными функциями. Собственные значения оператора системы обозначим $H(p)$. Так как p является комплексной величиной, то $H(p)$ — функция комплексного числа. Для всестороннего исследования собственных значений $H(p)$ требуется применение комплексного переменного. Поэтому задача анализа цепей и систем переносится в область комплексного переменного.

Комплексное число p изображают на плоскости комплексной частоты p (рис. 61). Горизонтальная ось представляет вещественные значения комплексного числа p . По этой оси откладываются значения коэффициента затухания σ . Вертикальная ось представляет мнимые значения p или вещественные значения частоты. При введении комплексной частоты p собственные значения операторов системы, например $Z(p)$, $Y(p)$, являются функциями комплексного переменного. Поведение этих функций в комплексной плоскости представляет наибольший интерес при изучении свойств систем и цепи.

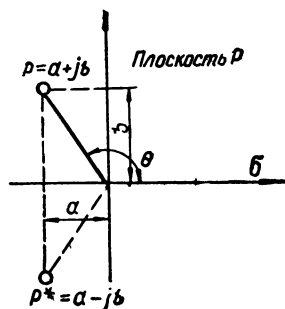


Рис. 61. Плоскость комплексной частоты. Ось абсцисс — ось коэффициентов затухания σ ; ось ординат — ось вещественных частот ω .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Атабеков. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. М., «Энергия», 1966.
2. Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. М., «Энергия», 1966.
3. Л. А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. М., «Высшая школа», 1964.
4. А. Ф. Белецкий. Основы теории линейных электрических цепей. М., «Связь», 1967.
5. С. Мезон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. М., ИЛ, 1963.
6. Ф. Реза, С. Сили. Современный анализ электрических цепей. М., «Энергия», 1964.
7. Л. Заде, Ч. Дезоер. Теория линейных систем. М., «Наука», 1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава I. Основные понятия и законы электрической цепи	
§ 1. Ток и напряжение. Энергия и мощность	5
§ 2. Элементы, цепи и системы	9
§ 3. Реальные элементы цепей, Схемы замещения	17
§ 4. Статические характеристики элементов цепи	20
§ 5. Основные законы для элементов цепи. Линейные и нелинейные цепи	22
§ 6. Основные законы для всей цепи	28
§ 7. Математическое определение линейных и нелинейных цепей. Принцип наложения	32
§ 8. Цепи с распределенными и сосредоточенными параметрами	33
§ 9. Классификация цепей и систем по числу входов и выходов. Воздействие и отклик системы. Оператор системы	34
§ 10. Понятие об элементарных функциях. Специальные функции	36
§ 11. Понятие об анализе и синтезе цепей	39
Глава II. Цепи при гармоническом и экспоненциальном воздействиях. Символический метод. Метод комплексной частоты	
§ 12. Основные определения	41
§ 13. Электрическая цепь при гармоническом воздействии	43
§ 14. Среднее и действующее значения функции. Средние и действующие значения э. д. с., напряжений и токов	45
§ 15. Математические методы расчета установившихся режимов в линейных электрических цепях при гармоническом воздействии	46
§ 16. Комплексный метод	53
§ 17. Комплексные сопротивления и проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме	62
§ 18. Мощность в цепи синусоидального тока	72
§ 19. Условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику. Баланс мощностей	79
§ 20. Цепи при экспоненциальном воздействии. Метод комплексной частоты	82
Литература	93

Николай Игнатьевич Кирсанов
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ
И СИСТЕМ
Учебное пособие
Часть I

Научный редактор доц. канд. техн. наук **Н. Н. Белоусов**
Редактор издательства *Т. А. Кузеванова*
Технический редактор *В. П. Шабанова*
Корректор *К. И. Билалова*

Редакционно-издательский отдел УПИ им. С. М. Кирова
Свердловск, К-2, главный учебный корпус

НС 18104 Сдано в набор 22/VI 1971 г. Подписано к печати 17/IV 1972 г.
Печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 7,5. Бумага 60×90¹/₁₆. Тираж 2000. Заказ 347. Цена 52 коп.

Типография издательства «Уральский рабочий»,
г. Свердловск, проспект Ленина, 49.

Цена 52 коп.